

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES À FINALITÉ APPROFONDIE

Estimation par modes glissants de l'état d'un système de convection, diffusion et réaction linéaire

Mohet, Judicael

Award date:
2020

Awarding institution:
Université de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



UNIVERSITE DE NAMUR

Faculté des Sciences

**ESTIMATION PAR MODES GLISSANTS DE L'ÉTAT D'UN SYSTÈME DE
CONVECTION, DIFFUSION ET RÉACTION LINÉAIRE**

**Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en Sciences mathématiques à finalité approfondie**

Judicaël MOHET

Juin 2020



UNIVERSITE DE NAMUR

Faculté des Sciences

**ESTIMATION PAR MODES GLISSANTS DE L'ÉTAT D'UN SYSTÈME DE
CONVECTION, DIFFUSION ET RÉACTION LINÉAIRE**

Promoteur :

Pr. Joseph WINKIN

Encadrant :

Anthony HASTIR

**Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en Sciences mathématiques à finalité approfondie**

Judicaël MOHET

Juin 2020

Remerciements

Tout d’abord, je voudrais remercier mon promoteur, Joseph WINKIN, d’avoir encadré mon mémoire durant cette année. Merci pour sa confiance et son soutien. Je le remercie également pour l’aide qu’il m’a apportée dans l’élaboration de ce travail.

Ensuite, je remercie Anthony HASTIR pour son aide ainsi que sa disponibilité. Ses précieux conseils ont grandement contribué à la finalisation de ce mémoire. Je lui suis très reconnaissant.

J’aimerais également remercier les personnes qui vont prendre le temps de parcourir mon manuscrit, principalement les membres du jury.

Je remercie grandement ma compagne, Marie DEBURGE, ainsi que ma soeur, Jezabel MOHET, pour leurs relectures attentives et leurs remarques. Elles m’ont permis d’améliorer la qualité de mon rapport.

Enfin, toute ma gratitude va à ma compagne et ma fille pour le soutien qu’elles m’ont apporté. Ce travail n’aurait probablement jamais vu le jour si elles n’avaient pas été présentes pour moi.

Pour terminer, je voudrais dédicacer quelques mots à mon père qui a fait preuve d’un courage incroyable durant cette année difficile. Son exemple m’a poussé à me donner corps et âme dans ce que je faisais.

Résumé

L'estimation d'état représente une partie importante de la théorie du contrôle. Dans ce travail, l'estimateur d'état par mode glissant est introduit en dimensions finie et infinie. Celui-ci consiste à appliquer une entrée discontinue sur la dynamique d'erreur dans le but d'amener les trajectoires sur une variété, appelée surface de glissement. En la choisissant de manière adéquate, le système exhibe les propriétés recherchées. Un tel estimateur est appliqué, en dimensions finie et infinie, sur un système de convection, diffusion et réaction linéaire soumis à une perturbation bornée. Ceci justifie notre choix du mode glissant qui présente une robustesse face à ce type de perturbations. Pour l'approche fonctionnelle, le résultat de [22, corollary 2.1] permet de s'assurer du caractère bien posé du modèle. Pour cela, la génération de semi-groupe fortement continu et compact sur l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1(0,1)$ est vérifiée. Notre preuve est basée sur le théorème de Lumer-Philips. La stabilité de l'erreur est également démontrée via la théorie de Lyapunov. Enfin, une comparaison entre "early" et "late" lumping est effectuée grâce à des simulations numériques. Il s'avère que l'estimateur de la dimension infinie présente de meilleures performances. Les effets des paramètres de ce dernier sont également étudiés.

Mots-clés : Estimateur d'état en mode glissant - Modèle de convection-diffusion-réaction linéaire perturbé - Stabilisation exponentielle - Early et late lumping - Solution de Filipov - Génération de semi-groupe sur $\mathcal{H}^1(0,1)$

Abstract

State estimation represents a main part of control theory. In this work, the sliding mode observer is introduced in finite and infinite dimensions. In both cases, a discontinuous input is injected in the error dynamics in order to steer the trajectories on a manifold called the sliding surface. The right choice of this manifold gives the appropriate behavior to the system. Such an observer is applied in both finite and infinite cases, on a linear convection-diffusion-reaction model subject to a bounded disturbance. The sliding mode observer is appropriate here thanks to its robustness for disturbances. Regarding the functional approach, Theorem [22, Corollary 2.1] ensures the well-posedness of the infinite-dimensional model. In order to apply the latter theorem, the compactness and the strong continuity of the semigroup generated by the operator dynamics is checked in the Sobolev space $\mathcal{H}^1(0,1)$. Our proof is based on the Lumer-Philips theorem. In addition, the error's stability is demonstrated thanks to Lyapunov theory. Finally, a comparison between early and late lumping is performed with numerical simulations. It turns out that the infinite-dimensional observer exhibits the best performances. The effects of all the parameters of the late lumping are also studied.

Keywords : Sliding mode observer - Disturbed linear convection-diffusion-reaction model - Exponential stabilization - Early and late lumping approaches - Filipov's solution - Generation of a semigroup in $\mathcal{H}^1(0,1)$

Table des matières

Introduction	1
1 Estimateur d'état en mode glissant en dimension finie	5
1.1 Solution de Filipov	5
1.2 Exemple introductif du contrôle en mode glissant	8
1.3 Estimateur d'état en mode glissant dans le cas linéaire fini	11
1.4 Application sur le modèle de convection, diffusion et réaction discrétisé	17
2 Estimateur d'état en mode glissant en dimension infinie	23
2.1 Théorème d'existence de solutions de Filipov	23
2.2 Estimateur d'état en mode glissant pour le modèle de convection, diffusion et réaction linéaire	27
2.2.1 Application du théorème d'existence de solutions de Filipov	27
2.2.2 Génération de semi-groupe fortement continu et compact sur $\mathcal{H}^1(0, 1)$	33
2.2.3 Stabilité de l'erreur	40
2.3 Discrétisation du modèle	43
3 Comparaison 'early lumping' et 'late lumping'	47
3.1 Cas non perturbé	48
3.2 Cas perturbé	51
3.3 Effets des différents paramètres du late lumping	53
Conclusions et perspectives	57
Annexes	59
Sous-espace vectoriel propre	59
Erreur de modélisation	59
Convergence de la série dans $\mathcal{H}^1(0, 1)$	60
Calcul de la norme des fonctions propres	61
Lexique	63

Introduction

La théorie du contrôle consiste à agir sur un système dynamique, décrit par une équation différentielle, pour que les solutions, appelées trajectoires d'état, présentent le comportement voulu. Certains systèmes se modélisent par une équation du type

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)),$$

où $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est la trajectoire d'état et $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application représentant la dynamique du système. La plupart des problèmes physiques peuvent être mis sous cette forme, notamment en utilisant la seconde loi de Newton. Le but est d'injecter une entrée dans l'équation

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + B\mathbf{u}(t), \tag{1}$$

où B est une matrice de \mathbb{R}_m^n et $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ est le terme de contrôle.

Dans beaucoup d'applications, la fonction $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x})$ est linéaire (ou correspond à la linéarisation d'une fonction autour d'un point d'équilibre). Dans ce cas, le modèle devient

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t),$$

où la matrice carrée A est de dimension n . Il y a énormément d'outils développés pour ce cas de figure. Par exemple, l'asservissement d'état consiste à trouver une matrice de gain K de sorte $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{x}(t)$. Il est alors possible de choisir cette matrice afin que les trajectoires de

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (A + BK)\mathbf{x}(t),$$

soient stables, c'est-à-dire convergent vers une valeur précédemment fixée.

Cependant, dans la pratique, il faut souvent avoir recours aux équations aux dérivées partielles. En effet, d'innombrables phénomènes physiques sont décrits par ces dernières : diffusion, propagation d'onde, écoulement d'un fluide, ... Il est toujours possible de mettre un tel modèle sous une forme semblable à (1) mais en remplaçant les matrices par des opérateurs définis sur des espaces de fonctions. C'est la raison pour laquelle nous devons travailler en dimension infinie.

Notre travail se place dans ce contexte : l'approche fonctionnelle des systèmes dynamiques. Pour plus d'information sur ce domaine, nous conseillons les ouvrages [8], [14] et [19]. Néanmoins, notre but n'est pas de contrôler les trajectoires mais de les estimer. Sous certaines conditions, telle que la détectabilité du système, il est possible de construire un estimateur d'état $t \mapsto \hat{\mathbf{x}}(t)$ de sorte que l'erreur

$$\mathbf{e}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$$

converge vers 0. En d'autres termes, l'état estimé converge vers l'état réel du système.

Ces outils sont souvent nécessaires dans la pratique. Il n'est pas toujours possible d'observer l'intégralité des trajectoires d'un système mécanique, soit pour des questions de faisabilité, soit pour des questions de coût. Les estimateurs les plus utilisés sont le filtre de Kalman [5] ainsi que l'estimateur de Luenberger [25].

Notre choix s'est posé sur l'estimateur d'état en mode glissant. Le contrôle en mode glissant est devenu populaire grâce à sa propriété de robustesse par rapport à des perturbations bornées. Lors de l'application industrielle de ce genre d'outils, ces perturbations sont inévitables et peuvent entraîner des effets indésirables. C'est pourquoi la robustesse est extrêmement importante.

Pour résumer, ce contrôle va forcer les trajectoires d'état à atteindre en un temps fini une surface dite de glissement du type

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid S(\mathbf{x}) = 0\},$$

pour une application $\mathbf{x} \mapsto S(\mathbf{x})$ donnée. Le but est de choisir cette application pour que le système présente les propriétés recherchées. Pour estimer un état par modes glissants, il faut définir un estimateur et appliquer un contrôle par modes de glissements sur la dynamique d'erreur.

La référence [33] offre une vue d'ensemble de la littérature sur ce sujet, pour la dimension finie. On y apprend que les premiers travaux datent des années 80. Les auteurs de [32] ont développé une stratégie qui consiste à renvoyer l'erreur de sortie linéairement, à la manière d'un estimateur de Luenberger, ainsi que de façon discontinue. Ceci permet de maximiser la zone de conditions initiales pour lesquelles le mouvement de glissement est possible. Un important article, [35], a été publié concernant les conditions qu'un système doit remplir pour que l'erreur d'estimation soit stable. Il contient également une comparaison entre 4 estimateurs non linéaires dans laquelle le mode glissant s'est avéré être le plus efficace.

Le travail de Walcott et Zak est à la base d'énormément d'articles tels que [12] ou encore [11]. Il y a également eu des contributions dans le domaine du FDI (*Fault Detection and Isolation*) via l'article [13] mais également sur des problèmes des second ordre via [30].

Nous voyons qu'il y a beaucoup de travaux sur la dimension finie. Il y en a nettement moins pour le cas infini. Néanmoins, le travail de la mathématicienne Levaggi dans son article [22] permet de poser les bases du mode glissant dans les espaces de Banach. Elle y montre une méthode analogue au contrôle équivalent développé par Utkin et Orlov dans leur papier [28]. Par ailleurs, ce second auteur a grandement contribué au domaine du contrôle en mode glissant en dimension infinie. Il en a notamment généralisé un du second ordre dans la référence [27].

Par contre, à notre connaissance, il y a un manque de travaux concernant l'estimation par modes de glissement en dimension infinie. Il existe quelques méthodes basées sur des techniques de la dimension finie appliquées à des équations aux dérivées partielles discrétisées. Par exemple, très récemment, les auteurs de [17] ont utilisé une technique de projection pour transformer une équation aux dérivées partielles décrivant le processus d'absorption du CO_2 en une équation différentielle ordinaire. Ils étaient alors en mesure d'appliquer l'estimateur en mode glissant sur leur modèle.

Le but premier de ce mémoire est d'introduire le lecteur à la théorie de l'estimateur d'état en mode glissant de la dimension finie et infinie. Le premier est essentiellement tiré de l'ouvrage

[12] tandis que le deuxième est basé sur un résultat de L. Levaggi de l'article [22].

Dans un second temps, nous voulons appliquer ces théories sur une équation de convection, diffusion et réaction linéaire soumise à des perturbations bornées. Cette dernière est un modèle de la dimension infinie. L'idée est de pouvoir comparer l'early et le late lumping. D'une part, on réduit la dimension du problème via, par exemple, les différences finies. Ensuite, un estimateur est construit sur le modèle discrétisé. D'autre part, l'analyse et la conception de l'estimateur se font via l'approche fonctionnelle et le modèle est discrétisé à la fin du processus dans le but de l'intégrer numériquement.

L'estimateur de la dimension infinie pour ce système a été développé il y a peu dans l'article [10] par J. Winkin, A. Vande Wouwer et H. Dimassi. Notre idée est de consolider les bases de ce dernier, notamment en démontrant la génération de semi-groupe fortement continu et compact sur l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1(0, 1)$. Ceci est nécessaire car nous supposons que l'unique mesure fiable du système se fait au bord. Par conséquent, la sortie du système est modélisée par l'opérateur qui évalue une fonction en un point (le bord en question). Un tel opérateur n'est pas borné sur $L^2(0, 1)$. Or, cette hypothèse est nécessaire pour l'application du théorème développé par Levaggi.

Nous commençons notre travail par le chapitre 1 sur l'estimation d'état par modes de glissement en dimension finie. Nous présentons la théorie des solutions de Filipov qui permet de s'affranchir du problème de discontinuité du contrôle glissant. Ensuite, nous utilisons un exemple pour introduire le fonctionnement de ce contrôle. Nous passons ensuite à l'estimation dans le cas linéaire fini et enfin à l'application sur un modèle de convection, diffusion et réaction perturbé.

Au chapitre 2, nous attaquons le cas de la dimension infinie. Nous montrons comment L. Levaggi est arrivée à son résultat, en utilisant la théorie de la viabilité. Ensuite, nous montrons comment ce théorème nous permet de construire l'estimateur souhaité sur le modèle de convection, diffusion et réaction perturbé. Pour cela, toutes les hypothèses sur le semi-groupe sont vérifiées. La stabilité de l'estimation est également prouvée grâce à la théorie de Lyapunov.

Le dernier chapitre 3 contient les simulations numériques des deux méthodes. Nous analysons le modèle avec et sans perturbation. Nous regardons également les effets que peuvent avoir les paramètres du late lumping.

Pour fluidifier le texte, nous avons pris la décision de rédiger un lexique contenant certaines définitions non présentes dans le corps de texte.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, nous allons présenter le modèle de convection, diffusion et réaction tiré de [23]. Bien que beaucoup de phénomènes physiques peuvent être symbolisés par ce dernier, nous introduisons le cas de l'évolution de la concentration d'une substance placée dans un fluide qui est soumise aux trois procédés cités précédemment.

Premièrement, la convection représente les mouvements horizontaux de la substance au sein du fluide. Ensuite, la diffusion résulte de mouvements irréversibles qui tendent à uniformiser le milieu. Ceux-ci se font des zones de forte concentration vers les zones où elle est plus faible. Enfin, la réaction (chimique) est responsable de la transformation de la substance.

Nous notons

$$(x, t) \mapsto z(x, t)$$

la concentration de la substance au point $x \in [0, 1]$ et au temps $t \geq 0$. L'intervalle spatial $[0, 1]$ représente la longueur du milieu dans lequel se déroule l'expérience (par exemple, un réacteur). La vitesse du milieu, supposée constante, est notée

$$(x, t) \mapsto v(x, t) = v.$$

Le phénomène de convection est décrit par $(x, t) \mapsto z(x, t) v(x, t)$ tandis que la réaction est décrite par une application $(x, t) \mapsto f(x, t)$. Nous utiliserons un coefficient de diffusion D supposé constant.

Nous allons définir le flux $\phi(x, t)$ comme étant la quantité de substance passant en x à l'instant t . Nous avons

$$\phi(x, t) = z(x, t) v(x, t) - D \frac{\partial z}{\partial x}(x, t).$$

Nous nous intéressons au changement de concentration dans un intervalle spatial $[x, x + \Delta x]$ et temporel $[t, t + \Delta t]$. La loi de conservation de la masse implique donc

$$\int_x^{x+\Delta x} (z(s, t + \Delta t) - z(s, t)) ds = (\phi(x, t) - \phi(x + \Delta x, t)) \Delta t + \int_x^{x+\Delta x} f(s, t) \Delta t ds.$$

En supposant que toutes les fonctions en jeu sont continues en x , nous savons par le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe x^* et $\hat{x} \in [x, x + \Delta x]$ tel que

$$(z(x^*, t + \Delta t) - z(x^*, t)) \Delta x = (\phi(x, t) - \phi(x + \Delta x, t)) \Delta t + f(\hat{x}, t) \Delta t \Delta x.$$

Si Δx et Δt sont non nuls, en divisant par le produit des deux, nous obtenons

$$\frac{z(x^*, t + \Delta t) - z(x^*, t)}{\Delta t} = \frac{\phi(x, t) - \phi(x + \Delta x, t)}{\Delta x} + f(\hat{x}, t).$$

En prenant les limites pour Δx et Δt qui tendent vers 0, nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t}(x^*, t) &= \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) + f(\hat{x}, t) \\ &= -D \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t) + v(x, t) \frac{\partial z}{\partial x}(x, t) + f(\hat{x}, t). \end{aligned}$$

Ceci est l'équation de convection-diffusion-réaction. La dérivée seconde représente la diffusion, la dérivée première spatiale la convection et enfin la fonction f décrit la réaction. Celle-ci dépend de l'application du modèle. Dans la suite, nous allons considérer une version linéarisée en prenant

$$f(x, t) = -k_0 z(x, t),$$

pour un coefficient k_0 positif. Nous fixerons également la vitesse v à 1 $\frac{m}{s}$.

Il est possible de développer une équation similaire pour l'évolution de la température. Par ailleurs, dans la pratique, les deux équations sont couplées entre elles, comme nous pouvons le voir dans les articles [36] et [21].

Ce type de systèmes est couramment utilisé dans l'industrie. Typiquement, cette équation décrit le fonctionnement d'un réacteur tubulaire [2]. Ceux-ci sont notamment utilisés pour la production de pétrole, la synthèse de l'ammoniaque ou encore pour nettoyer les eaux usées dans les stations d'épurations.

Chapitre 1

Estimateur d'état en mode glissant en dimension finie

Ce chapitre introduit l'estimation en mode glissant pour la dimension finie. Le cas de la dimension infinie sera traité dans le prochain chapitre.

Plus particulièrement, nous allons nous focaliser sur les systèmes linéaires. Cet estimateur a été introduit notamment par Spurgeon S.K. et Edwards C. dans leur ouvrage [12]. L'idée étant de mettre le système dans une forme dite canonique et de prouver, via la théorie de Lyapunov, la stabilité de l'erreur.

Cependant, le contrôle en mode glissant est basé sur la fonction signe qui est discontinue. Ceci implique que l'équation différentielle en boucle fermée a un second membre discontinu. Par conséquent, les théorèmes classiques d'existence et unicité des solutions d'EDO (Équations différentielles ordinaires) ne sont plus applicables. Pour contourner le problème, nous allons utiliser la théorie des solutions dites de Filipov qui sont des solutions d'inclusions différentielles [7].

Tout ceci est fait dans le but d'appliquer cet estimateur sur le modèle de convection, diffusion et réaction.

Nous commençons par introduire les solutions de Filipov. Ensuite, nous passons à la théorie de l'estimateur et enfin nous discutons de la discrétisation du modèle. Ce dernier étant décrit par une équation aux dérivées partielles, il faut le discrétiser pour pouvoir appliquer la théorie de la dimension finie.

1.1 Solution de Filipov

Considérons une EDO du type

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$.

Dans le cas où l'application \mathbf{f} est continue, les solutions de (1.1) seront classiques, i.e. ce seront des applications continuellement dérivables $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ vérifiant

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)).$$

Pour rappel, si \mathbf{f} est localement lipschitzienne, alors il existe une et une seule solution classique de (1.1). Néanmoins, toute application localement lipschitzienne est continue. Il en découle que les théorèmes d'existence et d'unicité ne s'appliquent plus dans le cas discontinu. Il faut introduire un nouveau concept de solutions pour palier à ce problème.

L'astuce est de définir des solutions qui ne suivent pas la direction du champ de vecteurs de l'équation. C'est le cas des solutions dites de Carathéodory qui sont les applications absolument continues vérifiant la forme intégrale de l'équation (1.1)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(s)) ds, \quad \forall t \geq 0.$$

L'idée suivie par A. Filipov dans son ouvrage [16] est de considérer un ensemble de directions qui sont déterminées par les valeurs du champ vectoriel dans un voisinage des points de discontinuité. On se retrouve alors avec des inclusions différentielles de la forme

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \in \mathcal{F}(\mathbf{x}(t)), \quad (1.2)$$

où $\mathcal{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ prend ses valeurs dans l'ensemble des parties de \mathbb{R}^n . Les solutions de Filipov sont les applications absolument continues $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ vérifiant l'inclusion pour presque tout $t \geq 0$. Nous verrons sur un exemple qu'en général, ces solutions ne sont pas uniques.

Pour formaliser l'idée du mathématicien russe, nous définissons

$$\mathcal{F}[\mathbf{f}]: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \mathbf{x} \mapsto \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{co} \left(\mathbf{f}(\overline{B_\epsilon(\mathbf{x})}) \right),$$

où $B_\epsilon(\mathbf{x})$ est la boule ouverte de \mathbb{R}^n centrée en \mathbf{x} de rayon $\epsilon > 0$ et où $co(E)$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble E . L'ensemble $\mathcal{F}[\mathbf{f}](\mathbf{x}(t))$ va être utilisé dans l'inclusion (1.2).

Exemple 1.1. Soit la fonction définie pour x réel par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Supposons qu'il existe une solution classique partant de $x(0) = 0$ de l'équation

$$\dot{x}(t) = f(x(t)).$$

Par conséquent, nous avons

$$\dot{x}(0) = f(x(0)) = 1.$$

Par continuité, nous en concluons qu'il existe un voisinage de 0 dans lequel la fonction $t \mapsto x(t)$ est croissante. Ainsi, nous avons

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) = -1$$

pour tout t suffisamment petit et non nul. Ceci implique que $t \mapsto \dot{x}(t)$ n'est pas continu et que par conséquent il n'existe pas de solution classique.

Ensuite, essayons de trouver l'expression de l'ensemble $\mathcal{F}[f]$. Nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](0) &= \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{\text{co}} \left(f(\overline{B_\epsilon(0)}) \right) \\ &= \overline{\text{co}}(\{-1, 1\}) \\ &= [-1, 1].\end{aligned}$$

Dès lors, nous trouvons

$$\mathcal{F}[f](x) = \begin{cases} \{-1\} & \text{si } x > 0 \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0 \\ \{1\} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

À présent, montrons que la solution d'une inclusion différentielle

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{F}[f](x(t))$$

n'est pas toujours unique. Prenons la fonction $f(x) = \text{sign}(x)$ qui est en fait la même que précédemment où l'on pose $f(0) = 0$. Les deux fonctions ont le même ensemble $\mathcal{F}[f]$

Pour toute condition initiale x_0 différente de 0, la solution de l'inclusion sera unique. Néanmoins, si $x_0 = 0$, il y a trois solutions données par

$$x_1(t) = -t, \quad x_2(t) = 0 \quad \text{et} \quad x_3(t) = t.$$

Avant de présenter le théorème d'existence de solution de Filipov, nous devons définir le concept d'application supérieurement semi-continue.

Définition 1.1. Soit X un espace métrique et $\mathcal{F}: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ une application prenant ses valeurs dans l'ensemble des parties de X . On dit que \mathcal{F} est supérieurement semi-continue en $x \in X$ si pour tout voisinage¹ V de $\mathcal{F}(x)$, il existe un voisinage W de x tel que

$$\mathcal{F}(W) \subseteq V.$$

Étant donné que les solutions de Filipov généralisent les solutions classiques, il faut pouvoir y retrouver cette notion. Pour cela, nous voulons que

$$\mathcal{F}[\mathbf{f}](\mathbf{x}) = \{\mathbf{f}(\mathbf{x})\}$$

lorsque l'application \mathbf{f} est continue en \mathbf{x} . Ainsi, les solutions de Filipov seront des solutions classiques aux points de continuité de \mathbf{f} . De plus, pour que ces solutions aient du sens, elles doivent vérifier $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathcal{F}[\mathbf{f}](\mathbf{x})$, pour presque tout \mathbf{x} . Le résultat suivant, venant de [3], va nous donner une condition pour que les solutions de Filipov aient les propriétés recherchées.

Théorème 1.1. Soit $\mathbf{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application localement bornée définie sur l'ouvert Ω de \mathbb{R}^n . Soit l'ensemble défini pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ par

$$\phi(\mathbf{x}) = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{\text{co}} \left(\mathbf{f}(\overline{B_\epsilon(\mathbf{x})}) \right).$$

Alors,

1. Les topologies étant celles engendrées par les distances.

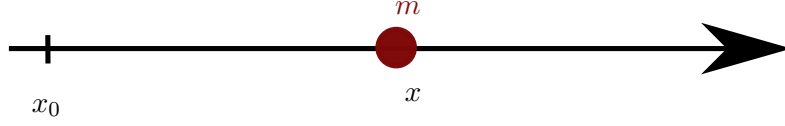


FIGURE 1.1 – Trajectoire horizontale de la masse m .

1. L'application $\mathbf{x} \mapsto \phi(\mathbf{x})$ est supérieurement semi-continue et à valeurs non vides, fermées et convexes ;
2. Si \mathbf{f} est continu en \mathbf{x} , alors $\phi(\mathbf{x}) = \{\mathbf{f}(\mathbf{x})\}$;
3. L'application $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \phi(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$.

Théorème 1.2. Soit $\mathbf{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application localement bornée sur l'ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, l'inclusion différentielle

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \in \mathcal{F}[\mathbf{f}](\mathbf{x}(t))$$

avec $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ admet une solution de Filipov.

Il y a donc une condition d'existence, appelée également condition de well-posedness, pour les solutions dites de Filipov. Cette condition est la bornitude locale de la fonction \mathbf{f} .

Remarque 1.1. Vu le résultat 1.1, si \mathbf{f} est localement borné, alors l'application $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}[\mathbf{f}](\mathbf{x})$ est supérieurement semi-continue et à valeurs non vides, fermées et convexes pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$. C'est le cas le plus simple lorsque le second membre de l'équation différentielle est non continu. Il existe néanmoins d'autres possibilités présentées dans l'ouvrage [3]. Par exemple, il existe un théorème d'existence de solution pour le cas où $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}[\mathbf{f}](\mathbf{x})$ est inférieurement semi-continue ou encore à valeurs non convexes.

Lorsque l'application $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}[\mathbf{f}](\mathbf{x})$ vérifie le point 1 du théorème 1.1, nous dirons que l'inclusion différentielle

$$\dot{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}[\mathbf{f}](\mathbf{x})$$

est de Filipov.

Dans la suite de ce chapitre, nous travaillerons avec ce type de solution. Nous verrons que dans le modèle de convection-diffusion-réaction discrétisé, la condition de bornitude est vérifiée ce qui nous assure la well-posedness.

1.2 Exemple introductif du contrôle en mode glissant

Avant de rentrer dans les détails de l'estimateur, nous introduisons le contrôle en mode glissant. En effet, pour estimer un état, on applique un contrôle (en mode glissant) sur la dynamique d'erreur.

Nous allons considérer l'exemple à une dimension d'une particule de masse $m = 1$ kg se déplaçant horizontalement. Nous noterons sa position $x(t)$. Un schéma est donné sur la figure 1.1.

En utilisant l'équation de Newton, nous pouvons décrire le système via une équation différentielle du second ordre. Nous la ramenons à un système de deux équations du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = u(x, y) + d(x, y, t) \end{cases} \quad (1.3)$$

où $(x, y) \mapsto u(x, y)$ est le contrôle et $(x, y, t) \mapsto d(x, y, t)$ représente un terme de perturbation inconnu mais borné

$$|d(x, y, t)| \leq K, \quad \forall t \geq 0,$$

où $K > 0$.

Pour contrôler ce système, il faut trouver une entrée u qui fait en sorte que les trajectoires (i.e. les solutions) de (1.3) convergent asymptotiquement vers 0. Pour cela, nous définissons une nouvelle variable

$$\sigma(x, y) = y + cx,$$

pour une constante $c > 0$. Si nous parvenons à l'annuler en un temps fini t_0 , nous aurons

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) &= 0, \forall t \geq t_0 \\ \Leftrightarrow y(t) &= -cx(t), \forall t \geq t_0 \\ \Leftrightarrow \dot{x}(t) &= -cx(t), \forall t \geq t_0 \\ \Leftrightarrow x(t) &= x_0 e^{-ct}, \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

Or, nous avons également $y(t) = -cx_0 e^{-ct}$, pour tout t supérieur à t_0 . Ceci implique la convergence asymptotique (à vitesse exponentielle). Bien entendu, il faut que σ reste nul après t_0 .

Utilisons la théorie de Lyapunov pour démontrer l'annulation de cette nouvelle variable. Nous définissons le système

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(x, y) = u(x, y) + d(x, y, t) + cy(t) \\ \sigma(x_0, y_0) = \sigma_0. \end{cases}$$

Nous prenons comme potentielle fonction de Lyapunov $V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2$. Elle est positive et s'annule si $\sigma = 0$. Ensuite, nous allons chercher un $\alpha > 0$ tel que

$$\dot{V}(\sigma) \leq -\alpha V^{\frac{1}{2}}(\sigma). \quad (1.4)$$

Dans ce cas, en laissant les dépendances implicites, nous aurons le long des trajectoires

$$\begin{aligned} \frac{\dot{V}}{V^{\frac{1}{2}}} &\leq -\alpha \\ \Rightarrow \int_0^t \frac{\dot{V}}{V^{\frac{1}{2}}} dt &\leq \int_0^t -\alpha dt \\ \Rightarrow 2 \left(V^{\frac{1}{2}}(\sigma(x(t), y(t))) - V^{\frac{1}{2}}(\sigma_0) \right) &\leq -\alpha t + a, \quad a \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow V^{\frac{1}{2}}(\sigma(x(t), y(t))) &\leq -\frac{1}{2}\alpha t + V^{\frac{1}{2}}(\sigma_0) + \frac{a}{2}, \quad a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous trouvons $V(\sigma(x(t_0), y(t_0))) = 0$ avec $t_0 = \frac{2V^{\frac{1}{2}}(\sigma_0) + a}{\alpha}$. Par définition, ceci implique que $\sigma(x(t_0), y(t_0))$ s'annule également.

À présent, cherchons le contrôle u permettant d'avoir (1.4). Nous avons, le long des trajectoires

$$\dot{V} = \sigma \dot{\sigma} = \sigma (cy + d + u).$$

Posons

$$u(x, y) = -cy - \rho \text{sign}(\sigma),$$

où $\rho > 0$ et sign est la fonction signe. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma d - \rho \sigma \text{sign}(\sigma) \\ &\leq |\sigma| K - \rho |\sigma| \\ &= |\sigma| (K - \rho) \\ &= -\alpha V^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

en prenant $\alpha = \sqrt{2}(\rho - K)$. Pour que cette constante soit positive, il faut supposer $\rho > K$. Le paramètre ρ permet de compenser la perturbation.

Une fois cette étape atteinte, les trajectoires se retrouvent dans la surface de glissement S définie par l'équation $\sigma(x, y) = 0$. Or, nous avons démontré que $\sigma \dot{\sigma} \leq 0$. Ainsi, après t_0 , si les trajectoires quittent la surface de glissement, σ devient soit négatif, soit positif. Dès lors, la fonction $t \mapsto \sigma(x(t), y(t))$ devient respectivement croissante ou décroissante ce qui ramène les trajectoires dans S .

Quoi qu'il en soit, la dérivée de σ va rester dans un voisinage de 0. Ceci implique alors que

$$u + d + cy \approx 0$$

Par conséquent, après t_0 , nous pourrions approximer la perturbation inconnue par

$$t \mapsto -u(t) - cy(t).$$

Néanmoins, cette discontinuité nous oblige à utiliser la théorie des solutions de Filipov expliquée dans la section précédente. Bien entendu, la fonction u est localement bornée étant donné qu'elle est bornée. Nous sommes donc certains qu'il existe des solutions au sens de Filipov pour cet exemple.

Dans le cas général, on définit une surface de glissement à partir d'une variable σ dépendant du problème et on utilise un contrôle de la forme

$$u(t) = u_1(t) - \rho \text{sign}(\sigma)$$

où le terme u_1 dépend également du problème, pour amener les trajectoires dans cette surface. Pour prouver la stabilité, il suffit de montrer que

$$\sigma \dot{\sigma} \leq -\alpha |\sigma|$$

pour un $\alpha > 0$.

1.3 Estimateur d'état en mode glissant dans le cas linéaire fini

Un estimateur d'état est un outil de la théorie du contrôle permettant d'estimer l'état (c-à-d les trajectoires) d'un système lorsque celui-ci n'est pas observable. L'approximation se base sur l'entrée et la sortie. Dans beaucoup d'applications, il est impossible de connaître l'entièreté des trajectoires.

Il existe différentes sortes d'estimateurs tels que le filtre de Kalman (voir [5]) encore l'estimateur de Luenberger (voir [25]). Ce dernier consiste à injecter l'erreur de sortie dans la dynamique. Supposons avoir un système du type

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t), \end{cases} \quad (1.5)$$

avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$. L'estimateur est construit à l'aide d'une matrice $L \in \mathbb{R}_p^n$ de sorte que

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + B\mathbf{u}(t) + L(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = C\hat{\mathbf{x}}(t) + D\mathbf{u}(t), \end{cases}$$

où $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{y}}$ sont les états estimés.

On définit ensuite l'erreur par $\mathbf{e}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$. Si celle-ci converge vers 0, alors l'état estimé convergera vers l'état réel. Or, la dynamique d'erreur est donnée par

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (A - LC) \mathbf{e}(t).$$

La détectabilité du système (1.5) assure l'existence d'une matrice de gain L stabilisant la dynamique d'erreur, i.e. telle que les valeurs propres de $A - LC$ soient dans le demi-plan complexe gauche ouvert.

Néanmoins, nous allons voir sur l'exemple suivant que cet estimateur ne gère pas très bien les perturbations.

Exemple 1.2. Soit un système de la forme

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \phi(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t), \end{cases}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \phi(t) = \sin(t).$$

La fonction sinus est une perturbation bornée par 1.

Ce système est observable et par conséquent détectable. Prenons

$$L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons

$$A - LC = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont -5.236 et -0.764 qui sont bien à parties réelles négatives.

Cependant, la dynamique d'erreur devient

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (A - LC)\mathbf{e}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \phi(t) = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{e} + \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Il est clair que cette dynamique n'est pas exponentiellement stable, à cause des termes de perturbation.

C'est la raison pour laquelle l'estimateur en mode glissant a été inventé. En effet, comme nous l'avons vu dans l'exemple introductif, l'utilisation d'un contrôle par modes de glissement sur une dynamique d'erreur perturbée permet de la stabiliser.

L'estimateur est donné par

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + B\mathbf{u}(t) + G_n\nu(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = C\hat{\mathbf{x}}(t) + D\mathbf{u}(t), \end{cases}$$

où $G_n \in \mathbb{R}_p^n$ est une matrice de gain à définir et $\nu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un terme d'injection discontinu. Nous notons les erreurs d'état et de sortie par

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t) &= \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}_y(t) &= \hat{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t) = C\mathbf{e}(t) \end{aligned}$$

L'idée est de construire ν de sorte que les trajectoires de la dynamique d'erreur arrivent en un temps fini sur la surface

$$S = \{\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n \mid C\mathbf{e} = \mathbf{0}\} = \ker C$$

et y restent. Vu l'exemple introductif, un contrôle de la forme

$$\nu(t) = -\rho \text{sign}(\mathbf{e}_y(t))$$

devrait permettre de réaliser cet objectif.

À présent, nous allons reprendre le développement d'un estimateur d'état en mode glissant développé dans l'ouvrage [12] et qui a été repris dans [31]. Celui-ci va être utilisé pour le modèle de convection, diffusion et réaction. Certaines démonstrations ne seront pas explicitement données.

Le modèle utilisé par Spurgeon S. et Edwards C. est le suivant

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + M\mathbf{d}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (1.6)$$

avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ et où $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^q$, avec $q \leq p$, est une perturbation inconnue mais vérifiant

$$\|\mathbf{d}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\| \leq \alpha(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}),$$

avec $\alpha: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ connu. De plus, sans perte de généralité, nous pouvons supposer les rangs de B , M et C pleins.

La première étape consiste à utiliser un changement de variable pour mettre le système (1.6) sous une forme plus facile à traiter. Le résultat suivant vient de [31, Lemma 3.1, p. 121].

Proposition 1.1. *Si le rang de M est égal au rang de CM , alors il existe un changement de variable $x \mapsto T_0x$ de sorte que*

$$\tilde{A} = T_0AT_0^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \tilde{M} = T_0M = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{M}_2 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{C} = CT_0 = \begin{pmatrix} 0 & T \end{pmatrix},$$

avec $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}_{n-p}^{n-p}$, $T \in \mathbb{R}_p^p$ une matrice orthogonale et $\tilde{M}_2 \in \mathbb{R}_q^q$ inversible.

De plus, dans le cas où $p \neq q$, il est utile de poser

$$\tilde{A}_{21} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{211} \\ \tilde{A}_{212} \end{pmatrix}$$

avec $\tilde{A}_{211} \in \mathbb{R}_{n-p}^{p-q}$. Si $p = q$, alors nous posons $\tilde{A}_{211} = \tilde{A}_{21}$.

À l'instar de Luenberger, l'hypothèse de détectabilité est nécessaire pour pouvoir appliquer l'estimateur en mode glissant. Néanmoins, il suffit que la paire $(\tilde{A}_{11}, \tilde{A}_{211})$ soit détectable. Le lemme [31, Lemma 3.2, p. 123] nous donne un moyen de vérifier cela dans les coordonnées de base.

Lemme 1.1. *La paire $(\tilde{A}_{11}, \tilde{A}_{211})$ est détectable si, et seulement si, les zéros invariants de (A, M, C) sont stables.*

Remarque 1.2. Les codes implémentés ont été faits en Matlab. Il existe une fonction, appelée `tzero`, renvoyant les zéros invariants d'un système. Il est donc assez simple de vérifier la condition de détectabilité en Matlab.

Ainsi, nous allons rajouter deux hypothèses à notre modèle, à savoir

1. $rg(CM) = rg(M)$
2. tous les zéros invariants de (A, M, C) sont stables.

Nous pouvons alors définir l'estimateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + B\mathbf{u}(t) - G_l\mathbf{e}_y(t) + G_n\nu(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = C\hat{\mathbf{x}}(t), \end{cases}$$

où $\mathbf{e}_y(t) = \hat{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t)$, $G_l \in \mathbb{R}_p^n$, $G_n \in \mathbb{R}_p^n$ et ν est un contrôle discontinu.

Par rapport à l'estimateur d'Utkin, il y a un terme supplémentaire d'injection de l'erreur $\mathbf{e}_y(t)$. En fait, cela permet d'augmenter la zone, appelée plaque de glissements, de conditions initiales assurant le mouvement de glissement, c'est-à-dire l'emprisonnement en temps fini des trajectoires par la surface de glissement.

L'hypothèse 1 nous permet de mettre le système (A, M, C) sous la forme de la propriété 1.1. Pour ne pas compliquer les notations, nous supposons qu'il est déjà transformé. Dans ces nouvelles coordonnées, on va poser

$$G_n = ||M_2|| \begin{pmatrix} 0 \\ I_p \end{pmatrix} \text{ et } G_l = \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} - A_{22}^s \end{pmatrix},$$

où A_{22}^s est une matrice stable (dont le spectre est inclus dans le demi-plan complexe gauche). Soit $P_0 \in \mathbb{R}_p^p$ une matrice symétrique définie positive telle que

$$P_0A_{22}^s + A_{22}^{s'}P_0$$

soit défini négatif. On dit que P_0 est une matrice de Lyapunov de A_{22}^s . Par ailleurs le théorème de Lyapunov stipule qu'une matrice est stable si, et seulement si elle admet une matrice de Lyapunov. Nous sommes donc certains que la matrice P_0 existe.

Ensuite, nous construisons le contrôle

$$\nu(t) = \begin{cases} -\rho(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}) \frac{P_0 \mathbf{e}_y(t)}{\|P_0 \mathbf{e}_y(t)\|} & \text{si } \mathbf{e}_y(t) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.7)$$

où $(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}) \mapsto \rho(t, \mathbf{y}, \mathbf{u})$ est une fonction scalaire qui va permettre de compenser les perturbations. Pour cela, nous devons exiger que

$$\rho(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}) \geq \alpha(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}).$$

La dynamique d'erreur est donnée par

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = A\mathbf{e}(t) - G_l \mathbf{e}_y(t) + G_n \nu(t) - M\mathbf{d}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

En remplaçant les matrices A , G_l , G_n et M par leurs formes transformées et en posant $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix}$, avec $\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^{n-p}$, la dynamique devient

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_1(t) = A_{11}\mathbf{e}_1(t) \\ \dot{\mathbf{e}}_y(t) = A_{21}\mathbf{e}_1(t) + A_{22}^s \mathbf{e}_y(t) + \|M_2\|\nu(t) - M_2\mathbf{d}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}). \end{cases} \quad (1.8)$$

La proposition 6.1 page 134 de [12] démontre qu'il existe des matrices symétriques définies positives P_1 et P_2 telles que la fonction

$$V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_y) = \mathbf{e}_1' P_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_y' P_2 \mathbf{e}_y$$

est une fonction de lyapunov de la dynamique d'erreur (1.8), la matrice P_2 vérifiant

$$P_2 A_{22}^s + A_{22}^{s'} P_2 = -I_p. \quad (1.9)$$

Cela implique que l'erreur est asymptotiquement stable.

La forme de V rappelle celle de l'exemple introductif $V_1 = \frac{1}{2}\sigma^2$. La première est en fait une généralisation de la seconde à plusieurs dimensions. Néanmoins, nous voulons montrer que le mouvement de glissement prend lieu dans l'ensemble

$$\{\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n \mid C\mathbf{e} = 0\} = \{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_y) \mid \mathbf{e}_y = 0\}.$$

Pour cela, nous devons commencer par montrer que la fonction

$$V_2(t) = \mathbf{e}_y(t)' P_2 \mathbf{e}_y(t)$$

vérifie une condition du type (1.4). Or, nous avons, le long des trajectoires

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{\mathbf{e}}_y' P_2 \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y' P_2 \dot{\mathbf{e}}_y \\ &= (A_{21}\mathbf{e}_1 + A_{22}^s \mathbf{e}_y + \|M_2\|\nu - M_2\mathbf{d})' P_2 \mathbf{e}_y \\ &\quad + \mathbf{e}_y' P_2 (A_{21}\mathbf{e}_1 + A_{22}^s \mathbf{e}_y + \|M_2\|\nu - M_2\mathbf{d}) \\ &= (\mathbf{e}_1' A_{21}' P_2 \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y' P_2 A_{21} \mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_y' (A_{22}^{s'} P_2 + P_2 A_{22}^s) \mathbf{e}_y \\ &\quad + \|M_2\|(\nu' P_2 \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y' P_2 \nu) - (\mathbf{d}' M_2' P_2 \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y' P_2 M_2 \mathbf{d}). \end{aligned}$$

Or, pour toute matrice $A \in \mathbb{R}_n^n$ et vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, nous avons

$$\mathbf{x}A\mathbf{y}' = \mathbf{y}A'\mathbf{x}.$$

En utilisant ceci et la relation (1.9), nous trouvons

$$\dot{V}_2 \leq 2\mathbf{e}_y' P_2 A_{21} \mathbf{e}_1 + 2\|M_2\| \|\mathbf{e}_y'\| P_2 \nu - 2\mathbf{e}_y' P_2 M_2 \mathbf{d}$$

Ensuite, en utilisant la définition (1.7) de ν ², nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq 2\mathbf{e}_y' P_2 A_{21} \mathbf{e}_1 - 2\|M_2\| \|P_2 \mathbf{e}_y\| \rho - 2\mathbf{e}_y' P_2 M_2 \mathbf{d} \\ &\leq 2\|P_2 \mathbf{e}_y\| \|A_{21} \mathbf{e}_1\| - 2\|M_2\| \|P_2 \mathbf{e}_y\| \rho + 2\|M_2\| \|P_2 \mathbf{e}_y\| \alpha \\ &= 2\|P_2 \mathbf{e}_y\| \|A_{21} \mathbf{e}_1\| - 2\|M_2\| \|P_2 \mathbf{e}_y\| (\rho - \alpha). \end{aligned}$$

Quitte à augmenter la valeur de ρ , nous allons supposer qu'il existe une constante positive η telle que

$$\rho > \alpha + \eta.$$

Par conséquent, nous avons

$$\dot{V}_2 \leq -2\|P_2 \mathbf{e}_y\| (\|M_2\| \eta - \|A_{21} \mathbf{e}_1\|).$$

Or, nous calculons

$$\begin{aligned} \|P_2 \mathbf{e}_y\|^2 &= (P_2^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_y)' P_2 (P_2^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_y) \\ &\geq \lambda_{\min}(P_2) \|P_2^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_y\|^2 \\ &= \lambda_{\min}(P_2) V_2, \end{aligned}$$

de sorte que $P_2 = P_2^{\frac{1}{2}} P_2^{\frac{1}{2}}$ et $\lambda_{\min}(P_2)$ est la valeur propre minimale de la matrice P_2 .

Si nous montrons que $(\|M_2\| \eta - \|A_{21} \mathbf{e}_1\|)$ est positif, alors, par un raisonnement analogue à celui fait dans l'exemple introductif, nous aurons prouvé que les trajectoires de la dynamique d'erreur se trouve, en un temps fini, dans l'ensemble

$$S = \{\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n \mid C\mathbf{e} = 0\}.$$

Or, nous savons que la dynamique d'erreur est asymptotiquement stable. Par conséquent, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un temps $t_1 > 0$ à partir duquel nous aurons

$$\|A_{21} \mathbf{e}_1\| < \epsilon.$$

Il suffit de choisir ϵ plus petit que $\|M_2\| \eta$ pour conclure.

Le mouvement de glissement est donc assuré. L'argument démontrant que les trajectoires restent sur la surface de glissement est identique à celui fait dans l'exemple introductif. Par ailleurs, il est également possible d'approximer la perturbation. Pour cela, nous savons qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $\dot{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}(t) = 0$, pour tout $t > t_0$. Ainsi, après un temps t supérieur à t_0 , nous trouvons

$$A_{21} \mathbf{e}_1(t) + \|M_2\| \nu(t) - M_2 \mathbf{d}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0.$$

2. La matrice P_2 est un cas particulier de la matrice P_0 .

Vu que la dynamique d'erreur est asymptotiquement stable, nous avons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (A_{21}\mathbf{e}_1(t) + \|M_2\|\nu(t) - M_2\mathbf{d}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})) = \|M_2\| \lim_{t \rightarrow +\infty} \nu(t) - M_2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{d}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0.$$

Ainsi, nous trouvons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} M_2^\dagger \|M_2\| \nu(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{d}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

où $A^\dagger = (A'A)^{-1}A'$ est l'inverse généralisée de la matrice A .

Pour résumer, si nous supposons que le rang de M est égal à celui de CM , que les zéros invariants de (A, M, C) sont stables et que $\rho > \alpha + \eta$, pour un η positif, alors nous savons que l'estimateur d'état

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + B\mathbf{u}(t) - G_l\mathbf{e}_y(t) + G_n\nu(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = C\hat{\mathbf{x}}(t), \end{cases}$$

va approcher les états du système (1.6) et ce, malgré la perturbation. Pour cela, il faut choisir

$$G_n = \|M_2\|T_0^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ I_p \end{pmatrix} \text{ et } G_l = T_0^{-1} \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} - A_{22}^s \end{pmatrix},$$

où A_{22}^s est une matrice stable et T_0 est le changement de variable du résultat 1.1. De plus, l'entrée est donnée par

$$\nu(t) = \begin{cases} -\rho(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) \frac{P_2\mathbf{e}_y(t)}{\|P_2\mathbf{e}_y(t)\|} & \text{si } \mathbf{e}_y(t) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où P_2 vérifie (1.9)³.

Exemple 1.3. Pour illustrer cette théorie, nous allons utiliser un exemple venant du livre [31, Exemple 3.6., p. 127]. Il s'agit de la dynamique linéarisée d'un véhicule dont le schéma est disponible sur la figure 1.2. Il y a quatre états qui sont la moyenne de la vitesse latérale v , la vitesse angulaire r , l'orientation du véhicule ψ et enfin la déviation par rapport à l'horizontale Y . Le système est décrit par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -3.9254 & 0 & 0 & -14.711 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 14.9206 & 0 & 1.6695 \\ 0.7287 & 0 & 0 & -2.1963 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.8116 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc $n = 4$, $p = 2$ et $q = 1$. Le système est déjà sous la forme canonique du théorème 1.1.

Nous avons défini

$$G_n = 0.8116 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$A_{22}^s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. En réalité, il suffit que P_2 soit une matrice de Lyapunov de A_{22}^s .

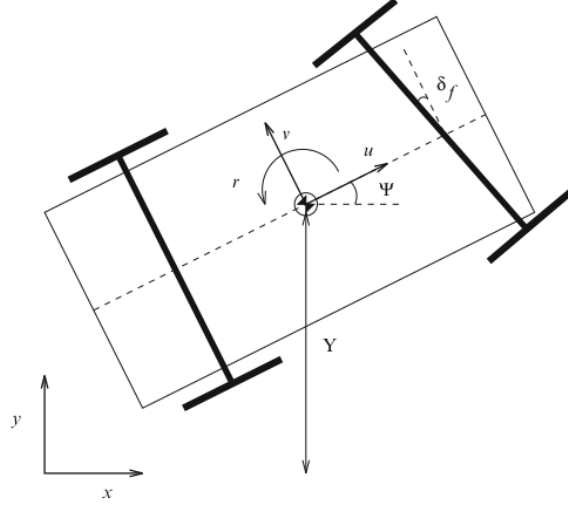


Fig. 2.10 Schematic of the vehicle

FIGURE 1.2 – Schéma du véhicule. L'image provient du livre [31, Fig. 2.10]

Par conséquent, la matrice G_l est donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & -14.711 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1.6695 \\ 0 & 0.1963 \end{pmatrix}.$$

Sur la figure 1.3, nous pouvons voir que l'estimateur par injection de sortie de Luenberger n'est plus efficace lorsque le système est perturbé par un sinus. Par contre, pour le mode glissant avec $\rho = 10$, il y a bel et bien convergence de l'erreur malgré la perturbation $\sin(t)$, ce que nous pouvons observer sur la figure 1.4. Par ailleurs, la convergence est plus rapide dans le second cas alors que le système est perturbé. Il faut 1.4 secondes pour que toutes les erreurs soient inférieures à 0.001 alors qu'il faut 5.65 secondes pour le Luenberger. Il est tout de même possible d'améliorer ses performances grâce aux choix de la matrice L . Nos simulations ont été faites via la fonction `place` de Matlab qui n'est pas des plus efficaces.

Ensuite, nous avons vu que l'estimateur en mode glissant permettait d'approcher la perturbation asymptotiquement. Nous avons appliqué une perturbation sinusoïdale $t \mapsto M \sin(t)$. En affichant la fonction $t \mapsto M_2^\dagger \|M_2\| \nu(t)$ sur la figure 1.5, nous voyons que cette dernière se rapproche de la perturbation $\sin(t)$. D'ailleurs, cette propriété des modes de glissement est utilisée pour identifier le bruit d'un système réel. Ceci est fait dans [12, Section 6.5].

1.4 Application sur le modèle de convection, diffusion et réaction discrétisé

Dans cette section, nous appliquons la théorie développée au point précédent dans le cas du modèle de convection, diffusion et réaction linéarisé.

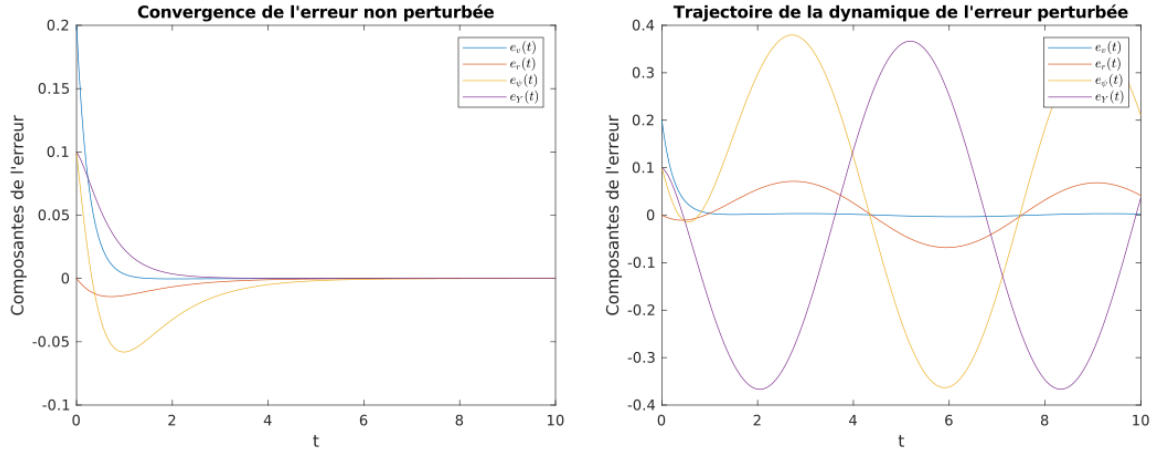


FIGURE 1.3 – Convergences des erreurs pour l'estimateur d'état de Luenberger appliqué au système du véhicule. Le système est perturbé par le terme $\sin(t)$ à droite. Il est clair que cet estimateur ne fonctionne plus lorsque le système est perturbé. La condition initiale est $\mathbf{e}_0(t) = (0.2 \ 0 \ 0.1 \ 0.1)'$.

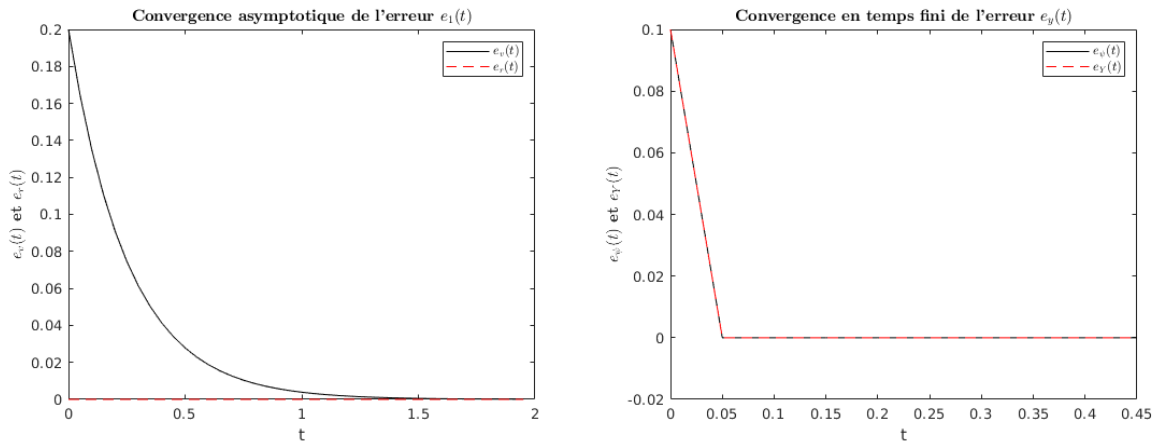


FIGURE 1.4 – Convergences des erreurs pour l'estimateur d'état en mode glissant appliqué au système du véhicule. Le système est perturbé par le terme $\sin(t)$. Le paramètre ρ est fixé à 10. Nous pouvons observer la convergence en temps fini de l'erreur $e_y(t) = (e_\psi(t) \ e_\gamma(t))'$ à droite ainsi que la convergence asymptotique de l'erreur $e_1(t) = (e_v(t) \ e_r(t))'$ à gauche. La condition initiale est $\mathbf{e}_0(t) = (0.2 \ 0 \ 0.1 \ 0.1)'$.

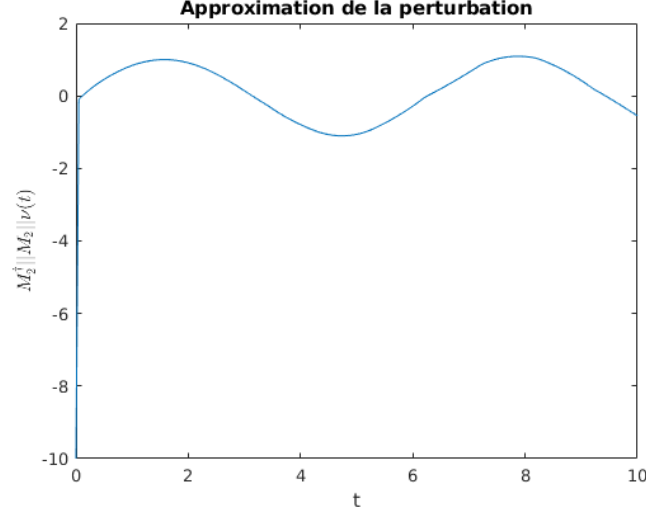


FIGURE 1.5 – Approximation de la perturbation effectuée lors de l'estimation d'état par modes de glissement du système du véhicule. Nous observons bien la sinusoïde étendue par le facteur 0.8116 apparaître.

Ce modèle étant décrit par une équation aux dérivées partielles, nous devons travailler dans un espace de dimension infinie pour remettre l'équation sous la forme

$$\dot{\mathbf{z}}(t) + A\mathbf{z}(t) = Bu(t).$$

Dans notre cas, l'opérateur A est donné par

$$A = -D \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} + k_0 I,$$

qui se trouve dans un espace de Banach du type $L^2([0, 1])$ ou encore $\mathcal{H}^1([0, 1])$.

En ce qui concerne les simulations numériques, il y a deux angles d'attaque. Le premier choix consiste à discrétiser le modèle pour le rendre fini et ensuite à appliquer la théorie de la dimension finie dessus. C'est ce que l'on appelle "l'early lumping". Le second choix quant à lui consiste à établir un estimateur en dimension infinie et de le discrétiser après. Par opposition, cette méthode est appelée "late lumping". Un exemple de comparaison est disponible dans l'article [4].

Dans ce qui suit, nous allons développer l'early lumping. Pour ce faire, nous avons choisi la méthode des lignes (voir [15]). L'équation du modèle perturbé par ϕ est donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\partial z}{\partial x}(x, t) - k_0 z(x, t) + \phi(t) \\ z(x, 0) = z_0(x), \end{cases} \quad (1.10)$$

avec les conditions aux bords dites de Danckwerts [26]

$$\begin{cases} D \frac{\partial z}{\partial x}(0, t) = z(0, t) \\ \frac{\partial z}{\partial x}(1, t) = 0, \end{cases}$$

pour tout $t \geq 0$ et $x \in [0, 1]$. Pour appliquer la méthode des lignes, nous discrétisons la variable spatiale x avec un pas $h = \frac{1}{n-1}$, avec n le nombre d'itérations du processus. Le but est

d'approcher l'équation (1.10) par une équation de la forme

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = M\mathbf{Z}(t) + \Phi(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (1.11)$$

avec $M \in \mathbb{R}_n^n$, $\mathbf{Z}(t) \in \mathbb{R}^n$ et $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \vdots \\ \phi(t) \end{pmatrix}$ pour tout t positif.

Notons $Z_i(t) = z(ih, t)$, pour $i = 0, \dots, n-1$. En utilisant le développement de Taylor, nous avons, pour tout t positif,

$$Z_{i+1}(t) = Z_i(t) + h \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x} \right)_i(t) + \mathcal{O}(h^2).$$

En isolant la dérivée partielle, nous obtenons la différence finie d'ordre 1

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x} \right)_i(t) = \frac{Z_{i+1}(t) - Z_i(t)}{h} + \mathcal{O}(h). \quad (1.12)$$

Cette relation va nous permettre d'approcher le terme de convection de l'équation (1.10). En ce qui concerne le terme de diffusion, nous allons utiliser deux fois la formule de Taylor à l'ordre 2. Pour tout t positif, on vérifie que

$$\begin{aligned} Z_{i+1}(t) &= Z_i(t) + h \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x} \right)_i(t) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial x^2} \right)_i(t) + \mathcal{O}(h^3) \\ Z_{i-1}(t) &= Z_i(t) - h \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x} \right)_i(t) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial x^2} \right)_i(t) + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

En sommant ces relations et en isolant la dérivée partielle d'ordre 2, nous obtenons la différence finie décentrée d'ordre 2

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial x^2} \right)_i(t) = \frac{Z_{i+1}(t) + Z_{i-1}(t) - 2Z_i(t)}{h^2} + \mathcal{O}(h). \quad (1.13)$$

En utilisant les relations (1.12) et (1.13), l'équation de convection, diffusion et réaction devient

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} \right)_i(t) = D \frac{Z_{i+1}(t) + Z_{i-1}(t) - 2Z_i(t)}{h^2} - \frac{Z_{i+1}(t) - Z_i(t)}{h} - k_0 Z_i(t) + \phi(t) + \mathcal{O}(h).$$

Pour les indices i compris entre 1 et $n-2$, nous avons donc

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} \right)_i(t) = \left(\frac{D}{h^2} - \frac{1}{h} \right) Z_{i+1}(t) + \left(-\frac{2D}{h^2} + \frac{1}{h} - k_0 \right) Z_i(t) + \frac{D}{h^2} Z_{i-1}(t) + \phi(t) + \mathcal{O}(h). \quad (1.14)$$

Lorsque i vaut 0 ou $n-1$, nous devons calculer Z_{-1} ainsi que Z_n . Pour cela, nous utilisons les conditions aux bords. En effet, nous savons que

$$\begin{aligned} D \frac{Z_0(t) - Z_{-1}(t)}{h} &= Z_0(t) \\ \frac{Z_n(t) - Z_{n-1}(t)}{h} &= 0 \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} Z_{-1}(t) &= \frac{D-h}{D} Z_0(t) \\ Z_n(t) &= Z_{n-1}(t) \end{aligned}$$

Ainsi, en injectant ceci dans (1.14) avec i qui vaut 0 et $n-1$, nous trouvons

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} \right)_0(t) &= \left(\frac{D}{h^2} - \frac{1}{h} \right) Z_1(t) + \left(-\frac{D}{h^2} - k_0 \right) Z_0(t) + \phi(t) + \mathcal{O}(h) \\ \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} \right)_{n-1}(t) &= \left(-\frac{D}{h^2} - k_0 \right) Z_{n-1}(t) + \frac{D}{h^2} Z_{n-2}(t) + \phi(t) + \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

Pour les conditions aux bords, il faut trouver une fonction $f(x) = z(x, 0)$ de sorte que $Df'(0) = f(0)$ et $f'(1) = 0$. Un premier choix est de prendre

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + D\frac{\pi}{2}.$$

Pour terminer, la sortie du système est

$$y(t) = Cz(x, t) = z(0, t).$$

Par conséquent, il suffit d'approcher C par la matrice $C_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ car

$$C_a \mathbf{Z}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_0 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{pmatrix}(t) = Z_0(t) (= z(0, t)).$$

Nous sommes à présent en mesure d'écrire l'approximation (1.11). Nous prenons donc la matrice des coefficients M qui vaut

$$\begin{pmatrix} -\frac{D}{h^2} - k_0 & \frac{D}{h^2} - \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{D}{h^2} & -\frac{2D}{h^2} + \frac{1}{h} - k_0 & \frac{D}{h^2} - \frac{1}{h} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{D}{h^2} & -\frac{2D}{h^2} + \frac{1}{h} - k_0 & \frac{D}{h^2} - \frac{1}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{D}{h^2} & -\frac{2D}{h^2} + \frac{1}{h} - k_0 & \frac{D}{h^2} - \frac{1}{h} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{D}{h^2} & -\frac{D}{h^2} - k_0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice nous permet d'intégrer notre modèle en utilisant un intégrateur numérique sur l'équation (1.11). Par exemple, en prenant la condition initiale citée plus haut

$$z_0(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + D\frac{\pi}{2},$$

nous obtenons des trajectoires (en 3 dimensions) que l'on peut observer sur la figure 1.6.

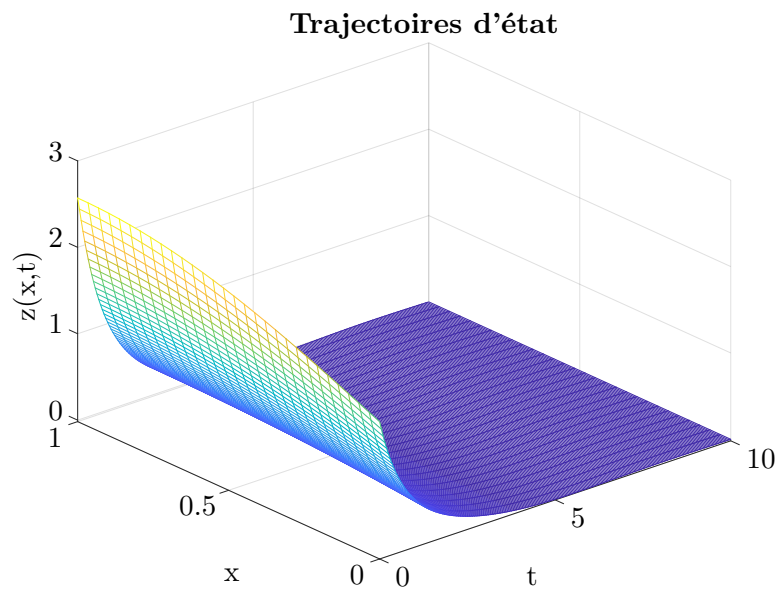


FIGURE 1.6 – Trajectoires obtenues pour notre système de convection, diffusion et réaction discrétisé. La condition initiale est donnée par $z_0(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x) + D\frac{\pi}{2}$. Les paramètres sont $D = 1$, $k_0 = 10^{-1}$ et $n = 30$.

Chapitre 2

Estimateur d'état en mode glissant en dimension infinie

2.1 Théorème d'existence de solutions de Filipov

Le but de cette section est d'arriver au théorème, développé par L. Levaggi dans [22], qui permet de s'assurer de la well-posedness d'un contrôle par modes de glissement en dimension infinie. En dimension finie, la discontinuité du contrôle impliquait que l'existence et l'unicité de la solution ne tenaient plus. Pour contourner ce problème, nous avons introduit la théorie des solutions dites de Filipov, c-à-d des solutions d'inclusions différentielles du type

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)),$$

où F est une application dont les valeurs sont des ensembles (*set-valued map* en anglais). Ceci impliquait une condition de well-posedness. Pour le cas infini, il y en a deux : l'existence de solutions de Filipov et la génération de semi-groupe fortement continu. Le résultat de Levaggi démontre la première condition.

Nous présentons le cheminement pour y arriver mais sans démontrer toutes les étapes. Le lecteur intéressé peut se référer à l'article cité ci-dessus.

Nous supposons travailler dans un espace de Banach X . Nous considérons sur cet espace l'équation différentielle abstraite

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + Ax(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où $t \geq 0$ et $x \in X$. L'application f peut être discontinue. Typiquement, elle prend la forme Bu , où u est un contrôle discontinu, comme pour le mode glissant. Pour compléter le modèle, nous faisons trois hypothèses supplémentaires¹ :

1. L'espace $(X, \|\cdot\|_X)$ est réflexif ;
2. L'opérateur $-A: D(A) \subseteq X \rightarrow X$ est fermé, densément défini et génère un semi-groupe fortement continu et compact $(K(t))_{t \geq 0}$ sur X ;

1. La première condition permet de ne pas se restreindre aux espaces de Hilbert. Les espaces de Banach réflexifs étant les espaces les plus généraux possibles après les espaces de Banach classiques. En particulier, tout espace de Hilbert est réflexif.

3. L'application f vérifie la condition de croissance, à savoir

$$\|f(x)\|_X \leq M\|x\|_X + N, \quad \forall x \in D(f),$$

pour des constantes positives ou nulles M et N .

Si ces conditions sont respectées, nous pouvons définir l'application qui prend ses valeurs dans l'ensemble des parties de X

$$F: X \rightarrow \mathcal{P}(X), x \mapsto F(x) = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{\text{co}} f(\overline{B_\epsilon}(x) \cap D(f)), \quad (2.1)$$

où $\overline{\text{co}}(E)$ est la fermeture de l'enveloppe convexe de l'ensemble E et $\overline{B_r}(x)$ la boule fermée de centre x et de rayon r .

Le premier résultat [22, Proposition 2.1] que nous présentons nous donne quelques propriétés intéressantes de cet ensemble $F(x)$.

Proposition 2.1. *Si f vérifie la condition de croissance, alors, pour tout $x \in X$, l'ensemble $F(x)$ défini en (2.1) est non vide, fermé, convexe et borné. De plus, l'application F est fortement et faiblement semi-continue supérieurement et localement bornée.*

Pour rappel, l'application F est semi-continue supérieurement sur X si pour tout x dans X et pour tout voisinage V de $F(x)$ dans $\mathcal{P}(X)$, il existe un voisinage W de x dans X tel que

$$F(y) \subseteq V, \quad \forall y \in W.$$

Les topologies sur X et $\mathcal{P}(X)$ peuvent être choisies comme étant les topologies engendrées par les distances² ou encore les topologies fortes et faibles.

En dimension finie, une inclusion différentielle

$$\dot{x}(t) \in E$$

était appelée inclusion de Filippov si l'ensemble E est non vide, fermé, convexe, localement borné et est supérieurement semi-continu. Dans notre cas, il suffit que f vérifie la condition de croissance pour que l'inclusion soit de Filippov. Ceci rappelle l'hypothèse de bornitude locale de f de la dimension finie. Il s'avère que la condition de croissance implique la bornitude locale.

Il n'est pas évident de travailler avec la définition de F . Il existe cependant une autre forme, démontrée dans [22, Proposition 2.2] : pour tout x dans X ,

$$F(x) = \overline{\text{co}} \{z \in X | \exists (x_n)_n \in D(f)^\mathbb{N}, x_n \rightarrow x \text{ et } f(x_n) \rightarrow z\}$$

À l'instar de la dimension finie, l'application à valeurs dans les parties de X construite en (2.1) va nous permettre de définir les solutions d'équations abstraites non continues. Celles-ci se basent sur la notion de solutions douces qui sont les solutions de la forme intégrale de l'équation. Si l'équation abstraite est $\dot{x}(t) + Ax(t) = f(x(t))$, pour $t \geq 0$ avec comme condition initiale x_0 , alors une solution douce est une application x telle que l'intégrale $\int_0^t x(s)ds$ est dans le domaine de l'opérateur A , pour tout t positif, et vérifie

$$x(t) - x_0 = - \int_0^t Ax(s)ds + \int_0^t f(x(s))ds, \quad \forall t \geq 0,$$

2. La norme sur X engendre la distance $d(x, y) = \|x - y\|_X$ tandis que la distance sur l'ensemble des parties de X est donnée par $d_{\mathcal{P}}(A, B) = \inf\{d(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

pour autant que f soit intégrable. De plus, il est connu que l'unique solution douce de l'équation abstraite est donnée par

$$x(t) = K(t)x_0 + (K * f)(t),$$

où l'opération $*$ est le produit de convolution. Dans le cas des inclusions différentielles, nous avons la définition [22, Definition 2.1.].

Définition 2.1. Une solution douce de l'inclusion différentielle

$$\dot{x}(t) + Ax(t) \in F(x(t))$$

est une fonction continue $x: [0, T] \rightarrow X$, avec $T > 0$, vérifiant

$$x(t) = K(t)x_0 + \int_0^t K(t-s)g(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

où $(K(t))_{t \geq 0}$ est le semi-groupe fortement continu et compact engendré par l'opérateur A et $g: [0, T] \rightarrow X$ est une fonction intégrable vérifiant $g(s) \in F(x(s))$ pour presque tout $s \in [0, T]$.

Nous pouvons à présent généraliser la notion de solution au cas discontinu.

Définition 2.2. Une solution généralisée de l'équation différentielle abstraite

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + Ax(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

est une solution douce de l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + Ax(t) \in F(x(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Le théorème que nous allons présenter nous assure la well-posedness du système lorsque le contrôle est discontinu et vérifie la condition de croissance, mais il permet également de s'assurer qu'un mouvement de glissement aura bien lieu. Cela se traduit par l'existence de solutions viables ([22, Definition 2.2]).

Définition 2.3. Soit $S \subseteq X$ et $x_0 \in S$, une solution douce de l'inclusion différentielle (2.3) est dite viable si

$$x(t) \in S, \quad \forall t \geq 0.$$

Nous appellerons solutions viables généralisées de (2.2) les solutions douces viables de (2.3).

Pour terminer, étant donné que nous voulons appliquer le résultat à un modèle linéaire, nous supposons que la fonction f se met sous la forme Bu , où u est un contrôle discontinu. Le théorème d'existence de solutions de Filipov ([22, Corollary 2.1]) s'énonce comme suit

Théorème 2.1. Si les conditions suivantes sont respectées :

1. Le couple $(X, \|\cdot\|_X)$ forme un espace de Banach réflexif ;
2. L'opérateur $-A: D(A) \subseteq X \rightarrow X$ génère un semi-groupe fortement continu et compact $(K(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X . De plus, l'opérateur $-A$ est fermé et densément défini ;
3. Le couple $(U, \|\cdot\|_U)$ forme un espace de Banach ;
4. L'opérateur $B: U \rightarrow X$ est linéaire et borné ;

5. Le contrôle $u: D(u) \subseteq X \rightarrow U$ est un opérateur densément défini qui vérifie la condition de croissance, i.e.

$$\exists N, M \geq 0 : \|u(x)\|_U \leq M \|x\|_X + N, \forall x \in D(u);$$

6. Le couple $(Y, \|\cdot\|_Y)$ forme un espace de Banach et l'opérateur $C: X \rightarrow Y$ est borné, linéaire, non nul et vérifie $D(u) = X \setminus S$ avec $S = \ker(C)$.

alors pour toute condition initiale $x_0 \in S \cap D(A)$, il existe une solution viable généralisée du système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + Ax(t) = Bu(t) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

pour autant que $Ax \in F(x) - S$ pour tout $x \in S \cap D(A)$, où $F(x) = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{co} Bu(\overline{B}_\epsilon(x) \cap D(u))$. De plus, sous ces conditions, toute solution viable généralisée prend la forme

$$x(t) = K(t)x_0 + \int_0^t K(t-s)g(s)ds,$$

pour tout $t \geq 0$, où g est une fonction intégrable vérifiant $g(s) \in Ax + S$ pour presque tout $s \in [0, +\infty[$.

Avant de rentrer dans la démonstration, commençons par définir le concept qui va nous permettre de prouver le théorème ([22, Definition 2.3]).

Définition 2.4. Soit S une partie non vide de X , un espace de Banach réflexif et τ la topologie faible (ou forte) sur X . L'ensemble S vérifie la condition de τ -tangence par rapport à l'inclusion différentielle (2.3) si, et seulement si, pour tout $x \in S$, il existe $y \in F(x)$, où $F(x)$ est défini en (2.1), tel que pour tout $\delta > 0$ et pour tout τ -voisinage de l'origine V , il existe $t \in]0, \delta[$ et $p \in V$ vérifiant

$$K(t)x + t(y + p) \in S,$$

où $(K(t))_t$ est le semi-groupe engendré par l'opérateur $-A$. Tout élément y vérifiant cette dernière condition est dit τ - A -tangent à S en x .

L'idée de la preuve est basée sur les deux résultats suivants venant de l'article [34, Theoreme 2.2, Remark 3.1 et Theoreme 5.1]

Théorème 2.2. Soit X un Banach réflexif et S une partie non vide de X localement fermée. Si S vérifie la condition de s -tangence par rapport à (2.3), où s est la topologie forte sur X , et si $(K(t))_{t \geq 0}$ est compact, alors, il existe une solution viable de (2.3) sur S

Lemme 2.1. Soit x un élément de $S \cap D(A)$. L'élément y de X est s - A -tangent à S en x si, et seulement si, $y \in S + Ax$.

Dès lors, nous sommes en mesure de démontrer le théorème 2.1.

Démonstration. Soit $x \in S \cap D(A)$. Supposons que $Ax \in F(x) - S$. Ainsi, il existe $y \in F(x)$ tel que

$$\begin{aligned} Ax - y &\in -S \\ \Leftrightarrow y - Ax &\in S \\ \Leftrightarrow y &\in S + Ax. \end{aligned}$$

Par le lemme 2.1, pour tout $x \in S \cap D(A)$, il existe $y \in F(x)$ tel que y soit s - A -tangent à S en x . Ce qui signifie que S vérifie la condition de s -tangence par rapport à (2.3).

De plus, l'opérateur $C: X \rightarrow Y$ est continu (car borné). Par conséquent, son noyau S est fermé, en particulier, il est aussi localement fermé. Nous pouvons donc conclure par le théorème 2.2. \square

2.2 Estimateur d'état en mode glissant pour le modèle de convection, diffusion et réaction linéaire

L'idée de base de ce mémoire était de reprendre le modèle de convection, diffusion et réaction développé dans l'article [10] pour l'étudier plus en profondeur. La première étape consistait à consolider la partie qui concerne la well-posedness du modèle, c-à-d l'existence de solution. Durant cette phase, nous avons constaté qu'une erreur de modélisation s'était glissée dans l'article de référence. Comme nous le verrons par la suite, le contrôle que nous obtenons diffère légèrement de celui présenté dans l'article. L'erreur sera expliquée plus en détail dans l'annexe. Ensuite, la deuxième étape concernait la stabilité de l'estimateur qui a été refaite après correction du contrôle.

Dans ce qui suit, nous utiliserons souvent l'abus de notation suivant : pour un opérateur A , la notation $Az(0)$ signifie en réalité $(Az(x))|_{x=0}$. Il en sera donc de même pour les dérivées.

2.2.1 Application du théorème d'existence de solutions de Filipov

Considérons le système dynamique perturbé décrit par l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\partial z}{\partial x}(x, t) - k_0 z(x, t) + \phi(t) \\ z(x, 0) = z_0(x), \end{cases}$$

avec les conditions aux bords dites de Danckwerts [26]

$$\begin{cases} D \frac{\partial z}{\partial x}(0, t) = z(0, t) \\ \frac{\partial z}{\partial x}(1, t) = 0, \end{cases}$$

pour un domaine spatial $[0, 1]$, un domaine temporel $[0, +\infty[$, des paramètres D et k_0 positifs et $z(x, t) \in \mathbb{R}$. Typiquement, les systèmes des réacteurs tubulaires sont régis par cette équation de convection, diffusion et réaction. L'article [36] propose une analyse dynamique de ce modèle. Le terme $t \mapsto \phi(t)$ représente une perturbation sur notre système. Lorsqu'on travail sur un modèle réel, ce genre de perturbation est très courante. Cela peut être une erreur dans le signal d'entrée ou encore une erreur de mesure au niveau des capteurs. Il est cependant très difficile de pouvoir évaluer cette perturbation. C'est pourquoi dans notre modèle, nous supposons l'application $t \mapsto \phi(t)$ inconnue. La seule hypothèse que nous demandons est qu'elle soit bornée, i.e.

$$|\phi(t)| \leq K, \quad \forall t \in [0, +\infty[,$$

pour une constante K positive connue. Pour terminer, nous supposons que nous pouvons seulement mesurer le système en $x = 0$, i.e. la sortie est donnée par $y(t) = z(0, t)$. Nous discuterons de la well-posedness de ce système plus tard.

L'idée est de construire un estimateur d'état pour ce système. Vu la perturbation, l'estimateur d'état en mode glissant semble être un bon candidat pour ce travail car nous avons déjà vu que ce dernier était robuste face à de telles imprécisions. Commençons par définir l'estimateur

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{z}}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\partial \hat{z}}{\partial x}(x, t) - k_0 \hat{z}(x, t) + u(t) \\ \hat{z}(x, 0) = \hat{z}_0(x), \end{cases}$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} D \frac{\partial \hat{z}}{\partial x}(0, t) = \hat{z}(0, t) \\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial x}(1, t) = 0 \end{cases}$$

et la sortie estimée $\hat{y}(t) = \hat{z}(0, t)$. Le contrôle $t \mapsto u(t)$ doit faire en sorte que la dynamique de l'erreur $e(x, t) = z(x, t) - \hat{z}(x, t)$ converge vers 0. Nous considérons un contrôle, dit unitaire, de la forme

$$u(t) = \rho \frac{e(0, t)}{|e(0, t)|}, \quad t \in [0, +\infty[,$$

où le réel ρ est choisi pour compenser la perturbation. Pour cela, nous verrons qu'il suffit de supposer que

$$\rho \geq K.$$

Ce contrôle est de la même forme que celui de la dimension finie, où nous normalisons Ce .

Le contrôle en mode glissant va être appliqué sur une équation abstraite. Nous verrons que pour arriver à cette équation, il faut rajouter un terme de contrôle

$$u(t) = u_g(t) + u_2(t),$$

où u_g est la partie glissante du contrôle et u_2 permet d'arriver à l'équation abstraite.

Pour déterminer la dynamique d'erreur, il suffit de remarquer que $\frac{\partial e}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial x}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial \hat{x}}{\partial t}(x, t)$, ce qui implique

$$\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\partial e}{\partial x}(x, t) - k_0 e(x, t) + \phi(t) - u(t) \\ e(x, 0) = e_0(x), \end{cases} \quad (2.4)$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} D \frac{\partial e}{\partial x}(0, t) = e(0, t) \\ \frac{\partial e}{\partial x}(1, t) = 0. \end{cases}$$

En utilisant ces dernières relations en 0, le contrôle u prend la forme

$$u(t) = \rho \frac{\frac{\partial e}{\partial x}(0, t)}{|\frac{\partial e}{\partial x}(0, t)|} + u_2(t).$$

Dans le but de parvenir à l'équation abstraite, nous considérons l'opérateur différentiel linéaire défini sur un espace de Banach X

$$-A: D(-A) \rightarrow X, z \mapsto D \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{dz}{dx} - k_0 z,$$

avec les paramètres définis précédemment. Nous considérons aussi l'opérateur linéaire

$$C: X \rightarrow \mathbb{R}, z(\cdot) \mapsto z(0).$$

Nous pouvons prendre l'espace de travail X comme étant $L^2(0, 1)$ (l'espace des fonctions de carré intégrable sur $[0, 1]$) mais pour des raisons que nous mentionnerons plus tard, nous prenons X comme étant l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1(0, 1)$ qui est l'espace des fonctions scalaires absolument continues sur $[0, 1]$ dont la dérivée première est de carré intégrable sur $[0, 1]$. Cet espace muni de la norme

$$h \mapsto \|h(\cdot)\|_1 = \left(\int_0^1 \left(h^2(x) + \left(\frac{dh}{dx} \right)^2(x) \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est un espace de Hilbert. L'indice 1 de la norme sera implicite si le contexte n'amène pas de confusion. À contrario, l'indice 0 réfèrera à l'espace $L^2(0, 1)$ car on définit l'espace de Sobolev

$\mathcal{H}^0(0, 1)$ comme étant $L^2(0, 1)$.

Ensuite, nous considérons le changement de variables

$$\xi(x, t) = e(x, t) + \alpha C e(x, t), \quad (2.5)$$

pour un scalaire α à déterminer. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial e}{\partial t}(x, t) + \alpha \frac{\partial e}{\partial t}(0, t) \\ &= -Ae(x, t) + \phi(t) - u(t) + \alpha \frac{\partial e}{\partial t}(0, t) \\ &= -Ae(x, t) + \phi(t) - \rho \frac{\frac{\partial e}{\partial x}(0, t)}{|\frac{\partial e}{\partial x}(0, t)|} - u_2(t) + \alpha \frac{\partial e}{\partial t}(0, t). \end{aligned}$$

Dès lors, si nous choisissons $u_2(t) = \alpha Ae(0, t) + \alpha \frac{\partial e}{\partial t}(0, t)$, alors nous obtenons

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}(x, t) = -A\xi(x, t) - \rho \frac{\frac{\partial e}{\partial x}(0, t)}{|\frac{\partial e}{\partial x}(0, t)|} + \phi(t).$$

Le contrôle prend donc la forme

$$u(t) = \rho \frac{e(0, t)}{|e(0, t)|} + \alpha Ae(0, t) + \alpha \frac{\partial e}{\partial t}(0, t), \quad t \in [0, +\infty[. \quad (2.6)$$

Remarquons que ce dernier ne dépend que des mesures en $x = 0$.

Pour terminer, si nous supposons $\alpha > 0$ (il suffit de supposer α non nul et différent de -1) et si I est l'opérateur identité, alors

$$\begin{aligned} e(0, t) &= \frac{1}{\alpha} (\xi(x, t) - e(x, t)) \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(\xi(x, t) - (I + \alpha C)^{-1} \xi(x, t) \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(I - (I + \alpha C)^{-1} \right) \xi(x, t) \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(I - \left(I - \frac{\alpha}{1 + \alpha} C \right) \right) \xi(x, t) \\ &= \frac{1}{1 + \alpha} C \xi(x, t). \end{aligned}$$

Tout ceci nous permet alors de considérer l'équation abstraite³ sur $X = \mathcal{H}^1(0, 1)$

$$\dot{\xi}(t) = -A\xi(t) + \phi(t) - \rho \frac{C\xi(t)}{|C\xi(t)|}, \quad (2.7)$$

avec $-A = D \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} - k_0 I$ défini sur son domaine $D(-A) = \{h \in \mathcal{H}^1(0, 1) \mid \frac{dh}{dx} \text{ a.c.}, \frac{d^2h}{dx^2} \in \mathcal{H}^1(0, 1), D \frac{dh}{dx}(0) = h(0), \frac{dh}{dx}(1) = 0\}$ ⁴ et $\dot{\xi}(t) = \frac{d\xi}{dt}(t)$.

3. Il est de coutume que la dépendance en x reste implicite pour les équations abstraites.

4. L'acronyme "a.c." signifie absolument continu.

Pour appliquer le théorème de Levaggi, nous supposons dans un premier temps la perturbation nulle. Nous pouvons réécrire l'équation abstraite (2.7) comme

$$\dot{\xi}(t) + A\xi(t) = B\tilde{u}(t),$$

où $B: \mathbb{R} \rightarrow X, u \mapsto 1(\cdot) u$ est la multiplication par l'opérateur unité et $\tilde{u}: D(\tilde{u}) \rightarrow \mathbb{R}, \xi \mapsto -\rho \frac{C\xi}{|C\xi|}$.

Vérifions dès maintenant les hypothèses du théorème de Levaggi. La première est vérifiée étant donné que l'espace de Sobolev muni de sa norme est un espace de Hilbert. En ce qui concerne la génération de semi-groupe, il est possible de montrer que l'opérateur $-A$ vérifie l'hypothèse sur $L^2(0, 1)$ (il suffit de remarquer que c'est un opérateur de Sturm-Liouville, par exemple). Cependant, l'hypothèse 6 impose que l'opérateur C soit borné. Malheureusement, l'opérateur C ne l'est pas sur $L^2(0, 1)$. En effet, prenons par exemple la fonction $f: x \mapsto x^{-\frac{1}{3}}$. Cette dernière est de carré intégrable mais n'est pas bornée en 0. En ce qui concerne la bornitude de C sur $\mathcal{H}^1(0, 1)$, pour tout $h \in \mathcal{H}^1(0, 1)$, nous avons

$$|Ch| = |h(0)|.$$

Or, nous pouvons montrer que toute fonction h de $C^1(0, 1)$ vérifie $|h(0)| \leq 2\|h(\cdot)\|_1$. Nous utilisons la densité de $C^1(0, 1)$ dans $\mathcal{H}^1(0, 1)$ pour conclure que

$$\|C\| \leq 2.$$

La question de génération de semi-groupe compact sur $\mathcal{H}^1(0, 1)$ sera traitée à part.

Ensuite, les conditions 3 et 4 sont remplies. Pour la 5, remarquons d'abord que $D(\tilde{u}) = \{h \in X | Ch \neq 0\} = X \setminus \ker C$. La propriété 3.1 nous assure que ce domaine est dense dans X . Nous remarquons également que pour tout $\xi \in D(\tilde{u})$, nous avons

$$|\tilde{u}(\xi)| \leq \rho$$

ce qui ne contredit pas la condition de croissance.

Ainsi, toutes les hypothèses du théorème 2.1 sont vérifiées par notre système. Il nous reste alors à montrer que pour tout $\xi \in \ker(C) \cap D(A)$, nous avons

$$A\xi \in F(\xi) - \ker(C). \quad (2.8)$$

Si tel est le cas, pour tout $\xi_0 \in \ker(C) \cap D(-A)$, l'équation abstraite (2.7) admettra une solution viable généralisée donnée par

$$\xi(t) = K(t)\xi_0 + \int_0^t K(t-s)g(s)ds, \quad t \geq 0,$$

de sorte que $g(s) \in A\xi(s) + \ker(C)$, pour presque tout $s \geq 0$.

Montrons donc que pour tout $\xi \in \ker(C) \cap D(-A)$, $A\xi$ se trouve dans $F(\xi) - \ker(C)$. En utilisant les conditions aux bords, nous déduisons que

$$\frac{d\xi}{dx} + k_0\xi \in \ker C,$$

si $\xi \in \ker C$. Dès lors, la condition (2.8) est vérifiée si, et seulement si

$$-D \frac{d^2 \xi}{dx^2} \in F(\xi), \quad (2.9)$$

pour tout $\xi \in \ker C$. Cette appartenance n'est pas quelque chose d'anodin et va demander une hypothèse supplémentaire sur le modèle. Pour le voir, il faut se donner une meilleure idée de ce que représente l'ensemble de Filipov $F(\xi)$. Pour cela, repartons de la définition

$$F(\xi) = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{C\tilde{u}}(\overline{B_\epsilon}(\xi) \cap D(\tilde{u})).$$

La première étape consiste à trouver l'image par $B\tilde{u}$ de la boule fermée $\overline{B_\epsilon}(\xi) \cap D(\tilde{u})$, c-à-d

$$- \rho \frac{C(\overline{B_\epsilon}(\xi) \setminus \ker C)}{|C(\overline{B_\epsilon}(\xi) \setminus \ker C)|}.$$

Vu que ξ est dans le noyau de C , nous trouvons, par continuité de C ,

$$C\overline{B_\epsilon}(\xi) = \overline{B_\epsilon}(0).$$

Ceci implique alors que

$$B\tilde{u}(\overline{B_\epsilon}(\xi) \cap D(\tilde{u})) = -\rho \overline{B_1}(0) \setminus \{0\} = [-\rho, \rho] \setminus \{0\}.$$

Il en découle directement que

$$F(\xi) = [-\rho, \rho].$$

La condition restante (2.9) est donc satisfaite si nous supposons

$$\left| \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{\rho}{D}, \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall x \in [0, 1]. \quad (2.10)$$

Cette condition est tout de même assez forte et n'est pas évidente à vérifier. L'idée est de jouer sur la condition initiale pour qu'elle respecte cette inégalité et de vérifier que celle-ci reste vraie pour tout temps t . Il est toujours possible d'augmenter la valeur de ρ pour adoucir la condition mais en gardant à l'esprit que cela augmentera les effets de phénomènes indésirables tels que le chattering.

La condition initiale doit vérifier les conditions aux bords. Nous allons présenter une condition initiale qui respecte la condition de Levaggi. Il s'agit d'un polynôme de degré n

$$e_0(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

En dérivant par rapport à x , nous obtenons $\frac{de_0}{dx}(x) = \sum_{k=1}^n a_k k x^{k-1}$. Les conditions limites se traduisent alors par

$$\begin{aligned} a_1 &= D a_0 \\ \sum_{k=1}^n k a_k &= 0. \end{aligned}$$

Cependant, le théorème qui assure l'existence de solution est valable pour toute condition initiale située dans le noyau de C . Ceci implique que $e_0(0) = 0$. Ainsi, nous trouvons

$$a_0 = a_1 = 0$$

$$\sum_{k=2}^n k a_k = 0.$$

Ensuite, pour la condition de Levaggi, il faut majorer la valeur absolue de la dérivée seconde, c-à-d

$$\left| \sum_{k=2}^n a_k k(k-1)x^{k-2} \right| \leq \frac{\rho}{D}.$$

Or, pour tout $x \in [0, 1]$, nous voyons que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=2}^n a_k k(k-1)x^{k-2} \right| &\leq \sum_{k=2}^n |a_k| k(k-1) \\ &\leq \max_k |a_k| \sum_{k=2}^n k(k-1) \\ &= \max_k |a_k| \frac{n^3 - n}{3} \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre

$$\max_k |a_k| \leq \frac{3\rho}{D(n^3 - n)}.$$

Exemple 2.1. Supposons que $D = 1 = k$. Prenons le paramètre ρ égal à 4. Tout d'abord, le polynôme doit avoir un degré supérieur à 2 sinon il serait nul. Supposons donc n égal à 3. Les conditions sont alors $a_0 = a_1 = 0$ et $3a_3 + 2a_2 = 0$. De plus, la condition de Levaggi sera vérifiée pour autant que la plus grande valeur absolue des coefficients soit inférieure à un demi. Un choix possible est alors donné par

$$e_0(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2.$$

Vérifions rapidement que la condition de Levaggi est satisfaite. La dérivée seconde de e_0 est donnée par $-2x$. Pour tout x dans $[0, 1]$, nous aurons bien

$$|e_0(x)| = 2 \leq \frac{\rho}{D} = 4.$$

Il reste cependant à vérifier numériquement que cette inégalité reste vraie au cours de l'intégration.

Pour conclure cette partie, nous venons de montrer que, pour toute condition initiale $\xi_0 \in \ker C$, l'équation abstraite (2.7) admettait une solution pour autant que $\alpha > 0$ et que la condition (2.10) soit vérifiée. À cette solution, nous pouvons lui associer $\xi(x, t) = e(x, t) + \alpha C e(x, t)$. Dès lors, la relation

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}(x, t) = -A\xi(x, t) - \rho \frac{\frac{\partial e}{\partial x}(0, t)}{|\frac{\partial e}{\partial x}(0, t)|} + \phi(t)$$

est vérifiée. En remplaçant dans cette égalité ξ par $e(x, t) + \alpha C e(x, t)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t}(x, t) &= -Ae(x, t) - \alpha Ae(0, t) - \alpha \frac{\partial e}{\partial t}(0, t) - \rho \frac{\frac{\partial e}{\partial x}(0, t)}{|\frac{\partial e}{\partial x}(0, t)|} + \phi(t) \\ &= -Ae(x, t) - u(t) + \phi(t). \end{aligned}$$

Ceci conclut la well-posedness de l'estimateur d'état en mode glissant (2.4).

2.2.2 Génération de semi-groupe fortement continu et compact sur $\mathcal{H}^1(0, 1)$.

Nous venons de voir dans la sous-section précédente que notre système admettait une solution viable généralisée si l'on supposait que l'opérateur $-A = D \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} - k_0 I$ générerait un semi-groupe fortement continu et compact $(K(t))_{t \geq 0}$ sur l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1(0, 1)$.

Cet opérateur génère un semi-groupe sur $L^2(0, 1)$. Pour le voir, on montre que l'opérateur A est de Sturm-Liouville et on utilise le résultat de [9]. Cependant, vu l'hypothèse de bornitude de l'opérateur C , nous décidons de travailler sur $\mathcal{H}^1(0, 1)$ sur lequel C est borné (une preuve de ceci est donnée dans [6, Comment 7, p. 315]).

Pour montrer la génération de semi-groupe, plusieurs outils sont à notre disposition, notamment les théorèmes de Hill-Yosida ([19, Theorem 6.1.3]) et de Lumer-Philips ([19, Theorem 6.1.7]). Le premier utilise l'opérateur résolvant tandis que le second utilise la notion de dissipativité. Nous allons utiliser la deuxième possibilité pour notre démonstration.

Le théorème de Lumer-Philips permet de montrer qu'un opérateur génère un semi-groupe de contraction fortement continu sous certaines hypothèses.

Théorème 2.3 (Lumer-Philips). *Soit X un espace de Hilbert et $A: D(A) \subseteq X \rightarrow X$ un opérateur linéaire. L'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction sur X si, et seulement si, il est dissipatif et que l'opérateur $A - \lambda I$ est surjectif, pour un λ strictement positif.*

Lorsque X est un Hilbert, un opérateur A est dissipatif si, et seulement si, pour tout z dans le domaine de A ,

$$\mathcal{R}(\langle Az, z \rangle) \leq 0.$$

Exemple 2.2. Prenons l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial z}{\partial x}(x, t), \quad z(x, 0) = z_0(x)$$

et les conditions aux bords $\frac{\partial z}{\partial x}(0, t) = 0 = \frac{\partial z}{\partial x}(1, t)$. Il s'agit de l'équation de convection pure d'un système isolé.

L'opérateur différentiel est $A = \frac{d}{dx}$. Nous le définissons sur $L^2(0, 1)$. Montrons par le théorème de Lumer-Philips que cet opérateur génère un semi-groupe fortement continu de contraction. Tout d'abord, le domaine de A est $D(A) = \{h \in L^2(0, 1) | h \text{ a.c.}, \frac{dh}{dx} \in L^2(0, 1), \frac{dh}{dx}(1) = 0 = \frac{dh}{dx}(0)\}$.

Soit $z \in D(A)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \langle Az, z \rangle &= \int_0^1 \frac{dz}{dx}(x, t) z(x, t) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[z^2(x, t) \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

L'opérateur A est donc dissipatif sur $L^2(0, 1)$.

Ensuite, pour montrer que l'opérateur $(A - I)$ est surjectif, pour toute fonction f de carré intégrable, on cherche une fonction z dans le domaine de A de sorte que $(A - I)z = f$. Autrement dit, il faut résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dz}{dx}(x) - z(x) = f(x).$$

La solution est donnée par $z(x) = e^x z(0) + \int_0^x e^{x-\xi} f(\xi) d\xi$. Si cette dernière est dans le domaine de A , alors la surjectivité est prouvée. Nous vérifions que $z(x) \in D(A)$ pour autant que

$$z(0) = - \int_0^1 e^{-\xi} f(\xi) d\xi.$$

Passons maintenant à notre système de convection, diffusion et réaction linéaire. Pour rappel, l'opérateur $-A$ est donné par

$$-A = D \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} - k_0 I,$$

pour des paramètres D et k_0 positifs. Son domaine est $D(-A) = \{h \in \mathcal{H}^1(0, 1) \mid \frac{dh}{dx} a.c., \frac{d^2 h}{dx^2} \in L^2(0, 1), D \frac{dh}{dx}(0) = h(0), \frac{dh}{dx}(1) = 0\}$.

Commençons par montrer que l'opérateur $-A - \lambda I$ est surjectif pour un $\lambda > 0$. Prenons h dans $\mathcal{H}^1(0, 1)$. Nous cherchons $z \in D(-A)$ tel que

$$h = (-A - \lambda I)z.$$

Cela est équivalent à résoudre l'équation différentielle

$$h(x) = D \frac{d^2 z}{dx^2}(x, t) - \frac{dz}{dx}(x, t) - (\lambda + k_0)z(x, t).$$

Il suffit de poser $Z_1(x, t) = z(x, t)$ et $Z_2(x, t) = \frac{dz}{dx}(x, t)$. Ainsi, l'équation à résoudre devient

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dx}(x, t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\lambda + k_0}{D} & \frac{1}{D} \end{pmatrix} Z(x, t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{D} \end{pmatrix} h(x) \\ &= M_1 Z(x, t) + M_2 h(x). \end{aligned}$$

Or, nous savons que la solution est donnée par

$$Z(x, t) = e^{M_1 x} Z(0, t) + \int_0^x e^{M_1(x-\xi)} M_2 h(\xi) d\xi.$$

En d'autres termes, si nous posons $e^{M_1 x} = \begin{pmatrix} w_{11}(x) & w_{12}(x) \\ w_{21}(x) & w_{22}(x) \end{pmatrix}$, alors nous trouvons,

$$\begin{cases} z(x, t) = \left(w_{11}(x) + \frac{w_{12}(x)}{D}\right) z(0, t) + \frac{1}{D} \int_0^x w_{12}(x - \xi) h(\xi) d\xi \\ \frac{dz}{dx}(x, t) = \left(w_{21}(x) + \frac{w_{22}(x)}{D}\right) z(0, t) + \frac{1}{D} \int_0^x w_{22}(x - \xi) h(\xi) d\xi \end{cases}.$$

Il reste à vérifier que cette solution est bien dans le domaine de $-A$. Nous avons

$$\frac{dz}{dx}(1, t) = \left(w_{21}(1) + \frac{w_{22}(1)}{D}\right) z(0, t) + \frac{1}{D} \int_0^1 w_{22}(1 - \xi) h(\xi) d\xi.$$

Ainsi, pour tout $h \in \mathcal{H}^1(0, 1)$, il suffit de prendre comme condition

$$z(0, t) = -\frac{\frac{1}{D} \int_0^1 w_{22}(1 - \xi)h(\xi)d\xi}{w_{21}(x) + \frac{w_{22}(x)}{D}}.$$

Ceci prouve la surjectivité.

Essayons à présent de montrer que l'opérateur $-A$ est dissipatif sur son domaine, c-à-d que pour tout $z \in D(-A)$, nous avons

$$\langle -Az, z \rangle_1 \leq 0.$$

Ainsi, prenons z dans le domaine de $-A$. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\langle -Az, z \rangle_1) &= D \langle \frac{d^2 z}{dx^2}, z \rangle_1 - \langle \frac{dz}{dx}, z \rangle_1 - k_0 \langle z, z \rangle_1 \\ &= D \langle \frac{d^2 z}{dx^2}, z \rangle_1 - \langle \frac{dz}{dx}, z \rangle_1 - k_0 \|z\|_1^2. \end{aligned}$$

Tout d'abord, le premier produit scalaire est égal à

$$\begin{aligned} \langle \frac{d^2 z}{dx^2}, z \rangle_1 &= \int_0^1 \left(\frac{d^2 z}{dx^2}(x, t)z(x, t) + \frac{d^3 z}{dx^3}(x, t)\frac{dz}{dx}(x, t) \right) dx \\ &= \left[\frac{dz}{dt}(x, t)z(x, t) \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{dz}{dx}(x, t)^2 dx \\ &\quad + \left[\frac{d^2 z}{dx^2}(x, t)\frac{dz}{dx}(x, t) \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{d^2 z}{dx^2}(x, t)^2 dx \\ &= -D \frac{dz}{dx}(0, t)^2 - \left\| \frac{dz}{dx} \right\|_0^2 - \frac{d^2 z}{dx^2}(0, t)\frac{dz}{dx}(0, t) - \left\| \frac{d^2 z}{dx^2} \right\|_0^2. \end{aligned}$$

Pour le second, nous trouvons

$$\begin{aligned} \langle \frac{dz}{dx}, z \rangle_1 &= \int_0^1 \left(\frac{dz}{dx}(x, t)z(x, t) + \frac{d^2 z}{dx^2}(x, t)\frac{dz}{dx}(x, t) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{dz^2}{dx}(x, t) + \frac{d}{dx} \left(\frac{dz}{dx} \right)^2(x, t) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(z(1, t)^2 - z(0, t)^2 - \frac{dz}{dx}(0, t)^2 \right). \end{aligned}$$

Tout ceci nous permet d'écrire le produit scalaire

$$\langle -Az, z \rangle_1 \leq \left(-\frac{D^2}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{dz}{dx}(0, t)^2 - D \frac{d^2 z}{dx^2}(0, t)\frac{dz}{dx}(0, t). \quad (2.11)$$

Commençons par travailler sur le second terme du membre de droite. L'inégalité de Young [20, eq. (2.28)] avec γ qui vaut 1 devient

$$\frac{d^2 z}{dx^2}(0, t)\frac{dz}{dx}(0, t) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 z}{dx^2}(0, t) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dx}(0, t) \right)^2.$$

Avant de continuer, nous introduisons l'opérateur trace. Ce dernier permet d'évaluer une fonction sur la frontière d'un ensemble. Il est défini comme suit

$$Tr: \mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow L^2(\delta\Omega), u \mapsto u|_{\delta\Omega},$$

pour un ensemble Ω donné (dans notre cas, Ω vaut $[0, 1]$). Ce dernier est borné en tant qu'opérateur de $\mathcal{H}^1(0, 1)$ à valeurs dans $L^2(\delta\Omega)$. De plus, il est clair que $\left(\frac{d^2z}{dx^2}(0, t)\right)^2$ est inférieur à $\left\|Tr\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right\|_1^2$. Il en est de même pour la dérivée première. Nous sommes alors en mesure de continuer notre majoration

$$\frac{d^2z}{dx^2}(0, t) \frac{dz}{dx}(0, t) \leq \frac{1}{2} \left\|Tr\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right\|_1^2 + \frac{1}{2} \left\|Tr\left(\frac{dz}{dx}\right)\right\|_1^2$$

Par la bornitude de l'opérateur trace, nous trouvons

$$\frac{d^2z}{dx^2}(0, t) \frac{dz}{dx}(0, t) \leq \frac{1}{2} \|Tr\|^2 \left\|\frac{d^2z}{dx^2}\right\|_1^2 + \frac{1}{2} \|Tr\|^2 \left\|\frac{dz}{dx}\right\|_1^2.$$

Cependant, nous savons que l'opérateur dérivée est borné sur $\mathcal{H}^1(0, 1)$. Il en est de même pour la dérivée seconde pour autant que la dérivée première reste dans $\mathcal{H}^1(0, 1)$, ce qui est le cas si $z \in D(-A)$. Par conséquent, nous avons que

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dx^2}(0, t) \frac{dz}{dx}(0, t) &\leq \frac{1}{2} \|Tr\|^2 \left\|\frac{d}{dx}\right\|^4 \|z\|_1^2 + \frac{1}{2} \|Tr\|^2 \left\|\frac{d}{dx}\right\|^2 \|z\|_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \|Tr\|^2 \left\|\frac{d}{dx}\right\|^2 \left(\left\|\frac{d}{dx}\right\|^2 + 1 \right) \|z\|_1^2. \end{aligned}$$

En procédant de manière équivalente sur le premier terme de (2.11), nous trouvons

$$\frac{dz}{dx}(0, t)^2 \leq \|Tr\|^2 \left\|\frac{d}{dx}\right\|^2 \|z\|_1^2.$$

En combinant tout ceci, nous arrivons au final à

$$\langle -Az, z \rangle \leq \left(\left| -\frac{D^2}{2} + \frac{1}{2} \right| \|Tr\|^2 \left\|\frac{d}{dx}\right\|^2 + \frac{D}{2} \|Tr\|^2 \left\|\frac{d}{dx}\right\|^2 \left(\left\|\frac{d}{dx}\right\|^2 + 1 \right) \right) \|z\|_1^2. \quad (2.12)$$

Si nous notons la constante multipliant la norme de l'erreur P , alors nous pouvons considérer l'opérateur $-A - PI$. Ce dernier est dissipatif car pour tout $z \in D(-A - PI) = D(-A)$,

$$\langle (-A - PI)z, z \rangle = \langle -Az, z \rangle - P\|z\|_1^2 \leq 0.$$

Nous en concluons que cet opérateur génère un semi-groupe fortement continu de contraction sur $\mathcal{H}^1(0, 1)$ ⁵. Le théorème de la perturbation bornée ([14, Theorem 1.3, p. 116]) nous assure alors que l'opérateur $-A - PI + PI = -A$ génère également un semi-groupe fortement continu $(K(t))_{t \geq 0}$ sur $\mathcal{H}^1(0, 1)$. De plus, ce même théorème nous donne une borne sur la norme du semi-groupe

$$\|K(t)\| \leq e^{|P|t}, \quad \forall t \geq 0,$$

5. Dans un espace réflexif, la surjectivité de $-A - \lambda I$ et la dissipativité de $-A$ impliquent que $-A$ est fermé et densément défini.

ce qui signifie que le semi-groupe $(K(t))_{t \geq 0}$ est de quasi-contraction (définition donnée dans le lexique).

La clef de la démonstration tient dans la bornitude de l'opérateur $-A$ sur son domaine. Nous savons déjà qu'un opérateur borné sur l'espace tout entier X génère un semi-groupe fortement continu de quasi-contraction donné par la forme en série généralisée de l'exponentielle

$$K(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{t^n (-A)^n}{n!}.$$

Néanmoins, dans notre cas, rien n'assure que les dérivées soient bornées hors du domaine. Nous ne pouvons donc pas conclure par cet argument. Par contre, notre démonstration nous permet de prouver le résultat suivant

Théorème 2.4. *Soit X un espace pré-Hilbertien et $A: X \rightarrow X$ un opérateur linéaire tel que l'opérateur*

$$A - \lambda I$$

est surjectif pour un $\lambda > 0$. Si l'opérateur A est borné sur son domaine, alors il est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de quasi-contraction sur X .

Démonstration. Soit x dans le domaine de A . Nous avons

$$\begin{aligned} \langle Ax, x \rangle_X &\leq |\langle Ax, x \rangle_X| \\ &\leq \|Ax\|_X \|x\|_X \\ &\leq \|A\| \|x\|_X^2. \end{aligned}$$

Nous trouvons donc une inégalité du type (2.12). Nous utilisons le raisonnement précédent pour conclure. \square

Ensuite, dans les hypothèses du théorème 2.1, le semi-groupe $(K(t))_{t \geq 0}$ engendré par $-A$ doit être compact sur l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1(0, 1)$. Pour le montrer, nous allons l'écrire comme limite uniforme d'opérateurs de rang fini ([6, Corollary 6.2]). Plus précisément, nous allons prouver que pour un $t_0 > 0$ fixé et pour tout z dans le domaine de $-A$, nous avons

$$\|K(t_0)z - K_N(t_0)z\|_1 \leq x_N \|z\|_1, \quad (2.13)$$

où $K_N(t_0)_N$ est un opérateur de rang fini, pour tout $N \in \mathbb{N}_0$ et $(x_N)_N$ tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Si tel est le cas, alors nous trouverons, en norme d'opérateur,

$$\|K(t_0) - K_N(t_0)\| \leq x_N \rightarrow 0, \quad \text{si } N \rightarrow \infty.$$

Ceci démontrera la compacité de l'opérateur $K(t_0)$, pour un $t_0 > 0$ fixé. Cependant, le théorème venant de [6, Theorem 6.3] implique que la composition d'un opérateur linéaire compact avec un opérateur borné linéaire est compact. Par conséquent, l'opérateur

$$K(t) = K(t_0)K(t - t_0), \quad \forall t > t_0,$$

le sera également.

Fixons $t_0 > 0$ et cherchons une suite d'opérateurs de rang fini vérifiant (2.13). Pour la définir, nous allons utiliser la décomposition spectrale de Riesz de l'opérateur $K(t)$ sur $L^2(0, 1)$ ([8, Theorem 2.3.5])

$$K(t_0)z = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} e^{\lambda_n t_0} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n(\cdot), \quad (2.14)$$

pour tout $z \in D(-A)$, avec $\{\phi_n \in D(-A) | n \in \mathbb{N}_0\}$ les fonctions propres de $-A$ de valeurs propres respectives $\{\lambda_n | n \in \mathbb{N}_0\}$. L'ensemble $\{\psi_n \in D((-A)^*) | n \in \mathbb{N}_0\}$ représente les fonctions propres de l'opérateur adjoint $(-A)^*$ de sorte que $\langle \phi_n, \psi_m \rangle = \delta_{nm}$. Qui plus est, l'ensemble des fonctions propres de $-A$ forme une base de Riesz de $L^2(0, 1)$ étant donné que son opposé est un opérateur de Sturm-Liouville (voir [9]).

Pour pouvoir utiliser la forme en série (2.14), il faut montrer qu'elle converge dans $\mathcal{H}^1(0, 1)$. Pour cela, nous montrons que la dérivée de la série converge dans $L^2(0, 1)$. Cela sera le cas si la dérivée de la série est égale à la série des dérivées. Cela est prouvé en annexe.

Comme nous pouvons le voir dans [18, Section 3.2], les fonctions propres de $-A$ sont données par

$$\phi_n(x) = L_n^{-1} e^{\frac{x}{2D}} \left(\cos\left(\frac{s_n}{2D}x\right) + \frac{1}{s_n} \sin\left(\frac{s_n}{2D}x\right) \right),$$

où la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ permet de normaliser ϕ_n tandis que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ se comporte comme du $\mathcal{O}(n)$ lorsque n tend vers l'infini et vérifie $s_n \geq 0$, pour tout $n \geq 1$. Les termes s_n sont proportionnels à $2\pi D(n-1)$ lorsque n est assez grand.

En résolvant l'équation en λ_n

$$-A\phi_n = \lambda_n \phi_n,$$

nous trouvons

$$\lambda_n = -\frac{s_n^2 + 1 + 4Dk_0}{4D}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

L'opérateur de rang fini est défini pour $N \in \mathbb{N}_0$ par

$$K_N(t_0)z = \sum_{n=1}^N e^{\lambda_n t_0} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n(\cdot), \quad \forall z \in D(-A).$$

Il est de rang fini car tout élément de son ensemble image s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments d'une base.

Ensuite, pour tout z dans le domaine de $-A$, nous calculons

$$\begin{aligned} \|K(t_0)z - K_N(t_0)z\|_1 &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{\lambda_n t_0} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n(\cdot) \right\|_1 \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{\lambda_n t_0} |\langle z, \psi_n \rangle| \|\phi_n\|_1. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned} \|K(t_0)z - K_N(t_0)z\|_1 &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{\lambda_n t_0} \|z\|_0 \|\psi_n\|_0 \|\phi_n\|_1 \\ &\leq \|z\|_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{\lambda_n t_0} \|\psi_n\|_0 \|\phi_n\|_1. \end{aligned}$$

Il nous reste à montrer que la suite définie par

$$x_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{\lambda_n t_0} \|\psi\|_0 \|\phi_n\|_1.$$

converge vers 0 lorsque N tend vers l'infini. Or, nous avons

$$x_N = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} e^{\lambda_n t_0} \|\psi\|_0 \|\phi_n\|_1 - \sum_{n=1}^N e^{\lambda_n t_0} \|\psi\|_0 \|\phi_n\|_1.$$

Nous devons donc démontrer que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N e^{\lambda_n t_0} \|\psi\|_0 \|\phi_n\|_1 \quad (2.15)$$

est fini et vaut

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} e^{\lambda_n t_0} \|\psi\|_0 \|\phi_n\|_1.$$

Nous savons déjà que les fonctions propres sont normalisées sur $L^2(0, 1)$. Par conséquent, nous avons

$$x_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{\lambda_n t_0} \|\phi_n\|_1 = \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{\lambda_n t_0} \sqrt{1 + \left\| \frac{d\phi_n}{dx} \right\|_0^2}.$$

Le calcul de la norme $L^2(0, 1)$ de la dérivée de ϕ_n est disponible en annexe. Celui-ci nous informe que

$$\left\| \frac{d\phi_n}{dx} \right\|_0^2 = L_n^{-2} \left(\alpha_n + \beta_n \cos\left(\frac{s_n}{D}\right) + \gamma_n \sin\left(\frac{s_n}{D}\right) \right),$$

avec

$$\alpha_n = \frac{1}{2D^2} \left(1 + \frac{(1 - s_n^2)^2}{4s_n^2} \right) (e^{\frac{1}{D}} - 1) - \frac{1}{D} \frac{3s_n^4 + 2s_n^2 - 1}{4s_n^2(1 + s_n^2)} = \mathcal{O}(n^2),$$

$$\beta_n = \frac{e^{\frac{1}{D}}}{2D} \frac{3s_n^4 + 2s_n^2 - 1}{4s_n^2(1 + s_n^2)} \rightarrow \frac{3e^{\frac{1}{D}}}{8D},$$

$$\gamma_n = \frac{e^{\frac{1}{D}}}{2D} \frac{-s_n^4 + 2s_n^2 + 3}{4s_n(1 + s_n^2)} = \mathcal{O}(n)$$

et

$$L_n^2 = \frac{s_n^2 + 1}{2s_n^2} (e^{\frac{1}{D}} - 1) + e^{\frac{1}{D}} \left(\frac{-D}{2s_n^2} \cos\left(\frac{s_n}{D}\right) + \frac{D}{2s_n} \sin\left(\frac{s_n}{D}\right) \right) \rightarrow \frac{e^{\frac{1}{D}} - 1}{2}$$

si $n \rightarrow \infty$.

Pour montrer que la série (2.15) converge, nous pouvons utiliser le critère de d'Alembert. Si la suite u_n de termes positifs vérifie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r,$$

alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} u_n$ converge si $r < 1$ et diverge si $r > 1$.

Dans notre cas, la suite u_n est $e^{\lambda_n t_0} \sqrt{1 + \left\| \frac{d\phi_n}{dx} \right\|_0^2}$ et nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= e^{(\lambda_{n+1} - \lambda_n) t_0} \frac{\sqrt{1 + \left\| \frac{d\phi_{n+1}}{dx} \right\|_0^2}}{\sqrt{1 + \left\| \frac{d\phi_n}{dx} \right\|_0^2}} \\ &= e^{(\lambda_{n+1} - \lambda_n) t_0} \sqrt{\frac{1 + \left\| \frac{d\phi_{n+1}}{dx} \right\|_0^2}{1 + \left\| \frac{d\phi_n}{dx} \right\|_0^2}} \\ &\approx e^{\frac{-2\pi^2 n + \pi^2}{D} t_0} \left(\frac{\frac{1}{8D^2} (e^{\frac{1}{D}} - 1) (2\pi)^4 n^4}{\frac{1}{8D^2} (e^{\frac{1}{D}} - 1) (2\pi)^4 (n-1)^4} \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ si } n \gg 1 \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

où nous avons pris les termes de plus haut degré du quotient. Ceci vient donc conclure la compacité de l'opérateur $-A$ sur l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1(0, 1)$.

2.2.3 Stabilité de l'erreur

Dans cette partie, nous allons utiliser la théorie de Lyapunov pour déterminer la stabilité de la dynamique d'erreur (2.4).

Le paramètre D étant positif, nous pouvons définir la fonction

$$V(t) = \frac{D}{2} \frac{\partial e}{\partial x}(0, t)^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial e}{\partial x}(s, t)^2 ds.$$

Celle-ci s'annule si $\frac{\partial e}{\partial x}(\cdot, t)$ s'annule et est positive. De plus, si nous la dérivons le long d'une trajectoire d'état de la dynamique d'erreur, nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= D \frac{\partial e}{\partial x}(0, t) \frac{\partial^2 e}{\partial t \partial x}(0, t) + \int_0^1 \frac{\partial e}{\partial x}(s, t) \frac{\partial^2 e}{\partial t \partial x}(s, t) ds \\ &= D \frac{\partial e}{\partial x}(0, t) \frac{\partial^2 e}{\partial t \partial x}(0, t) + \left[\frac{\partial e}{\partial x}(s, t) \frac{\partial e}{\partial t}(s, t) \right]_{s=0}^{s=1} - \int_0^1 \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(s, t) \frac{\partial e}{\partial t}(s, t) ds. \end{aligned}$$

En utilisant les conditions aux bords et en remplaçant la dérivée temporelle de l'erreur par la dynamique (2.4), nous trouvons

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -D \int_0^1 \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(s, t)^2 ds + \int_0^1 \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(s, t) \frac{\partial e}{\partial x}(s, t) ds + k_0 \int_0^1 \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(s, t) e(s, t) ds \\ &\quad + (u(t) - \phi(t)) \int_0^1 \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(s, t) ds. \end{aligned}$$

Ensuite, le contrôle $u(t)$ est donné par

$$u(t) = \rho \frac{\frac{\partial e}{\partial x}(0, t)}{\left| \frac{\partial e}{\partial x}(0, t) \right|} + \alpha A e(0, t) + \alpha \frac{\partial e}{\partial t}(0, t).$$

Ainsi, le terme dépendant du contrôle devient

$$\begin{aligned}
u(t) \int_0^1 \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(s, t) ds &= -u(t) \frac{\partial e}{\partial x}(0, t) \\
&= -\rho \left| \frac{\partial e}{\partial x}(0, t) \right| + \alpha D \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(0, t) \frac{\partial e}{\partial x}(0, t) \\
&\quad - (\alpha + \alpha D k_0) \frac{\partial e}{\partial x}(0, t)^2 - \alpha \frac{\partial e}{\partial t}(0, t) \frac{\partial e}{\partial x}(0, t).
\end{aligned}$$

Le terme $\alpha D \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(0, t) \frac{\partial e}{\partial x}(0, t)$ peut être transformé en utilisant la relation (2.4) par

$$\begin{aligned}
\alpha D \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(0, t) \frac{\partial e}{\partial x}(0, t) &= \alpha \frac{\partial e}{\partial t}(0, t) \frac{\partial e}{\partial x}(0, t) + \alpha \frac{\partial e}{\partial x}(0, t)^2 + \alpha k_0 e(0, t) \frac{\partial e}{\partial x}(0, t) \\
&= \alpha D \frac{\partial^2 e}{\partial t \partial x}(0, t) \frac{\partial e}{\partial x}(0, t) + (\alpha + \alpha D k_0) \frac{\partial e}{\partial x}(0, t)^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous trouvons la relation

$$u(t) \int_0^1 \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(s, t) ds = -\rho \left| \frac{\partial e}{\partial x}(0, t) \right|.$$

Dès lors, en développant le terme $\int_0^1 \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(s, t) e(s, t) ds$ par parties, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= -D \int_0^1 \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(s, t)^2 ds - (Dk_0 + \frac{1}{2}) \frac{\partial e}{\partial x}(0, t)^2 - k_0 \int_0^1 \frac{\partial e}{\partial x}(s, t)^2 ds \\
&\quad + \phi(t) \frac{\partial e}{\partial x}(0, t) - \rho \left| \frac{\partial e}{\partial x}(0, t) \right|.
\end{aligned}$$

Étant donné que D est positif, le premier terme est majoré par 0

$$\dot{V}(t) \leq -(Dk_0 + \frac{1}{2}) \frac{\partial e}{\partial x}(0, t)^2 - k_0 \int_0^1 \frac{\partial e}{\partial x}(s, t)^2 ds + (\phi(t) - \rho) \left| \frac{\partial e}{\partial x}(0, t) \right|.$$

De plus, nous avons choisi $|\phi(t)| \leq \rho$ et donc le dernier terme est négatif. Dès lors, nous avons

$$\dot{V}(t) \leq -(Dk_0 + \frac{1}{2}) \frac{\partial e}{\partial x}(0, t)^2 - k_0 \int_0^1 \frac{\partial e}{\partial x}(s, t)^2 ds.$$

Posons $\tau_1 = \min \left\{ \frac{2Dk_0+1}{D}, 2k_0 \right\}$. Ainsi, si le paramètre k_0 est positif, nous pouvons majorer

$$\dot{V}(t) \leq -\tau_1 V(t), \tag{2.16}$$

pour tout $t \geq 0$. La fonction V est décroissante et par conséquent, c'est une fonction de Lyapunov de la dynamique d'erreur. Qui plus est, la relation (2.16) implique

$$V(t) \leq V(0) e^{-\tau_1 t}, \tag{2.17}$$

pour tout $t \geq 0$. Ceci signifie que la dynamique d'erreur est exponentiellement stable.

Ainsi, pour autant que le paramètre ρ compense la perturbation, la dynamique d'erreur sera exponentiellement stable sur $\mathcal{H}^1(0, 1)$. En particulier, il en découle que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\|e(x, t)\|_0 \rightarrow 0,$$

si t tend vers l'infini. En effet, par définition, la norme sur $L^2(0, 1)$ est majorée par la norme sur $\mathcal{H}^1(0, 1)$ qui est elle-même majorée par une exponentielle décroissante. Nous déduisons également

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |e(0, t)| = 0.$$

Pour la suite, nous avons besoin d'un résultat technique venant de [29, Lemma 1].

Lemme 2.2. *Pour tout $\xi(\cdot, t) \in \mathcal{H}^1(0, 1)$, l'inégalité*

$$\|\xi(\cdot, t)\|_0^2 \leq 2 \left(\xi^2(0, t) + \left\| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right\|_0^2 \right)$$

est vérifiée, pour tout $t \geq 0$.

Si nous l'appliquons à $e(\cdot, t)$, nous obtenons

$$\|e(\cdot, t)\|_0^2 \leq 2 \left(e(0, t)^2 + \left\| \frac{\partial e}{\partial x}(\cdot, t) \right\|_0^2 \right)$$

Cependant, pour la norme $\mathcal{H}^1(0, 1)$, nous avons

$$\begin{aligned} \|e(\cdot, t)\|_1^2 &\leq \|e(\cdot, t)\|_0^2 + \left\| \frac{\partial e}{\partial x}(\cdot, t) \right\|_0^2 \\ &\leq 3 \left\| \frac{\partial e}{\partial x}(\cdot, t) \right\|_0^2 + 2e(0, t)^2 \\ &= 3 \left\| \frac{\partial e}{\partial x}(\cdot, t) \right\|_0^2 + 2D^2 \frac{\partial e}{\partial x}(0, t)^2. \end{aligned}$$

Nous choisissons $\tau_2 = \min\{\frac{1}{6}, 4D\}$. Ce paramètre est positif et par conséquent,

$$\tau_2 \|e(\cdot, t)\|_1^2 \leq V(t)$$

Avec la relation (2.17), nous obtenons

$$\tau_2 \|e(\cdot, t)\|_1^2 \leq \frac{1}{2} \left(D \left(\frac{\partial e_0}{\partial x}(0) \right)^2 + \left\| \frac{\partial e_0}{\partial x}(\cdot) \right\|_0^2 \right) e^{-\tau_1 t}. \quad (2.18)$$

Nous en concluons que la dynamique d'erreur est exponentiellement stable sur le domaine de $-A$ pour toute condition initiale $e_0(x) \in D(-A)$.

À présent, nous allons montrer que cette dynamique tend uniformément vers 0, lorsque t tend vers l'infini. Pour cela, nous aurons besoin de l'inégalité d'Agmon ([1, Lemma 13.2]) et de celle de Young ([20, eq. (2.28)])

$$\forall \omega \in \mathcal{H}^1(0, 1), \quad \max_{x \in [0, 1]} |\omega(x)|^2 \leq \omega(0)^2 + 2\|\omega(\cdot)\|_0 \left\| \frac{\partial \omega}{\partial x}(\cdot) \right\|_0 \quad (2.19)$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad ab \leq \frac{\gamma}{2} a^2 + \frac{1}{2\gamma} b^2, \quad \forall \gamma > 0. \quad (2.20)$$

Par la relation (2.19), nous avons

$$\max_{x \in [0, 1]} |e(x, t)|^2 \leq e(0, t)^2 + 2\|e(\cdot, t)\|_0 \left\| \frac{\partial e}{\partial x}(\cdot, t) \right\|_0.$$

Ensuite, en prenant (2.20) avec γ qui vaut 1, nous trouvons

$$2\|e(\cdot, t)\|_0 \left\| \frac{\partial e}{\partial x}(\cdot, t) \right\|_0 \leq \|e(\cdot, t)\|_0^2 + \left\| \frac{\partial e}{\partial x}(\cdot, t) \right\|_0^2.$$

En combinant les deux dernières relations, nous obtenons l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0,1]} |e(x, t)|^2 &\leq e(0, t)^2 + \|e(\cdot, t)\|_0^2 + \left\| \frac{\partial e}{\partial x}(\cdot, t) \right\|_0^2 \\ &= e(0, t)^2 + \|e(\cdot, t)\|_1^2. \end{aligned}$$

Pour finir, en reprenant (2.18), nous avons

$$\max_{x \in [0,1]} |e(x, t)|^2 \leq e(0, t)^2 + \frac{1}{2\tau_2} \left(D \left(\frac{\partial e_0}{\partial x}(0) \right)^2 + \left\| \frac{\partial e_0}{\partial x}(\cdot) \right\|_0^2 \right) e^{-\tau_1 t}.$$

Étant donné que le terme $e(0, t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini, nous pouvons conclure de la convergence uniforme de l'erreur.

Pour résumer cette section, nous avons démontré le résultat suivant

Théorème 2.5. *Si l'inégalité $\rho \geq K$ est vérifiée, alors la dynamique d'erreur (2.4) de l'estimateur d'état en mode glissant pour le modèle de convection, diffusion et réaction est exponentiellement stable sur $D(-A)$ pour toute condition initiale dans le domaine. De plus, l'erreur $e(x, t)$ converge uniformément en x vers 0 lorsque t tend vers l'infini.*

2.3 Discrétisation du modèle

Comme dans le chapitre précédent, nous avons besoin de discrétiser le modèle développé précédemment pour pouvoir l'intégrer numériquement. Pour cela, nous continuons à utiliser la méthode des lignes (voir [15]).

Lorsque nous rassemblons tout ce qui a été fait dans la partie précédente, nous nous rendons compte que l'équation à discrétiser est la suivante

$$\frac{\partial e}{\partial t}(x, t) = -Ae(x, t) + \phi(t) - \rho \frac{\frac{\partial e}{\partial x}(0, t)}{|\frac{\partial e}{\partial x}(0, t)|} - \alpha Ae(0, t) - \alpha \frac{\partial e}{\partial t}(0, t). \quad (2.21)$$

Le terme glissant est égal à $-\rho \frac{e(0, t)}{|e(0, t)|}$ et n'a donc pas besoin d'être discrétisé. Il en est de même pour la perturbation. Nous devons donc discrétiser l'équation

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t}(x, t) &= -Ae(x, t) - \alpha Ae(0, t) - \alpha \frac{\partial e}{\partial t}(0, t) \\ &= D \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\partial e}{\partial x}(x, t) - k_0 e(x, t) + \alpha D \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(0, t) - \alpha \frac{\partial e}{\partial x}(0, t) - \alpha k_0 e(0, t) - \alpha \frac{\partial e}{\partial t}(0, t). \end{aligned}$$

Comme nous l'avons vu dans la section 1.4, en posant $E_i(t) = e(ih, t)$ avec $i = 0, \dots, n-1$ et $h = \frac{1}{n-1}$, en utilisant les développements de Taylor, nous pouvons trouver

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial E}{\partial x} \right)_i(t) &= \frac{E_{i+1}(t) - E_i(t)}{h} + \mathcal{O}(h) \\ \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \right)_i(t) &= \frac{E_{i+1}(t) + E_{i-1}(t) - 2E_i(t)}{h^2} + \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

La première étape consiste à discrétiser le terme de contrôle

$$u_2(t) = \alpha A e(0, t) + \alpha \frac{\partial e}{\partial t}(0, t)$$

En reprenant les calculs de la section 1.4, nous savons que $-Ae(0, t) = \left(\frac{D}{h^2} - \frac{1}{h}\right) E_1(t) - \left(\frac{D}{h^2} + k_0\right) E_0(t) + \mathcal{O}(h)$. Pour faciliter l'écriture, nous posons

$$G(t) = \left(\frac{D}{h^2} - \frac{1}{h}\right) E_1(t) - \left(\frac{D}{h^2} + k_0\right) E_0(t).$$

Ainsi, le contrôle est donné par

$$u_2(t) = -\alpha G(t) + \alpha \dot{E}_0(t) + \mathcal{O}(h).$$

Dans le but de déterminer le terme de la dérivée temporelle, nous devons discrétiser l'équation (2.21) lorsque i vaut 0. Cela donne

$$\begin{aligned} \dot{E}_0(t) &= G(t) + \phi(t) - u_2(t) + \mathcal{O}(h) \\ &= (1 + \alpha)G(t) + \phi(t) - \alpha \dot{E}_0(t) + \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

En isolant la dérivée de E_0 , nous obtenons

$$\dot{E}_0(t) = G(t) + \frac{1}{1 + \alpha} \phi(t) + \mathcal{O}(h).$$

Ceci permet de conclure que le contrôle est

$$u_2(t) = 2\alpha G(t) + \frac{\alpha}{1 + \alpha} \phi(t) + \mathcal{O}(h).$$

Ensuite, nous allons chercher à exprimer la dérivée de $E_{n-1}(t)$. Pour i qui vaut $n - 1$, nous trouvons

$$\begin{aligned} \dot{E}_{n-1} &= -\left(\frac{D}{h^2} + k_0\right) E_{n-1}(t) + \frac{D}{h^2} E_{n-2}(t) + \phi(t) - u_2(t) + \mathcal{O}(h) \\ &= -\left(\frac{D}{h^2} + k_0\right) E_{n-1}(t) + \frac{D}{h^2} E_{n-2}(t) + \frac{1}{1 + \alpha} \phi(t) - 2\alpha G(t) + \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

Pour terminer, nous allons faire de même pour un indice i compris entre 1 et $n - 1$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \dot{E}_i(t) &= \left(\frac{D}{h^2} - \frac{1}{h}\right) E_{i+1}(t) + \left(-\frac{2D}{h^2} + \frac{1}{h} - k_0\right) E_i(t) \\ &\quad + \frac{D}{h^2} E_{i-1}(t) + \frac{1}{1 + \alpha} \phi(t) - 2\alpha G(t) + \mathcal{O}(t). \end{aligned}$$

Il reste deux cas à traiter, ceux où i vaut 1 et 2. Dans les deux cas, des termes peuvent se regrouper et cela donne respectivement

$$\begin{aligned} \dot{E}_1(t) &= \left(\frac{D}{h^2} - \frac{1}{h}\right) E_2(t) + \left(-2(1 + \alpha)\frac{D}{h^2} + (1 + 2\alpha)\frac{1}{h} - k_0\right) E_1(t) \\ &\quad + \left((1 + 2\alpha)\frac{D}{h^2} + 2\alpha k_0\right) E_0(t) + \frac{1}{1 + \alpha} \phi(t) + \mathcal{O}(h), \\ \dot{E}_2(t) &= \left(\frac{D}{h^2} - \frac{1}{h}\right) E_3(t) + \left(-\frac{2D}{h^2} + \frac{1}{h} - k_0\right) E_2(t) + \left((1 - 2\alpha)\frac{D}{h^2} + \frac{2\alpha}{h}\right) E_1(t) \\ &\quad + 2\alpha \left(\frac{D}{h^2} + k_0\right) E_0(t) + \frac{1}{1 + \alpha} \phi(t) + \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

Pour résumer cette section, l'équation (2.21) discrétisée prend la forme

$$\dot{E}(t) = ME(t) + \Phi(t) + \mathcal{O}(h),$$

avec

$$\Phi(t) = \frac{1}{1+\alpha} \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \vdots \\ \phi(t) \end{pmatrix}$$

et la matrice des coefficients M est donnée par

$$\begin{pmatrix} -(\frac{D}{h^2} + k_0) & \frac{D}{h^2} - \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ M_{21} & M_{22} & \frac{D}{h^2} - \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & \frac{D}{h^2} - \frac{1}{h} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D}{h^2} & M_{33} & \frac{D}{h^2} - \frac{1}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{D}{h^2} & M_{33} & \frac{D}{h^2} - \frac{1}{h} \\ M_{31} & M_{(n-1)2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{D}{h^2} & -(\frac{D}{h^2} + k_0) \end{pmatrix}$$

de sorte que

- $M_{21} = (1 + 2\alpha)\frac{D}{h^2} + 2\alpha k_0$
- $M_{22} = -2(1 + \alpha)\frac{D}{h^2} + (1 + 2\alpha)\frac{1}{h} - k_0$
- $M_{31} = 2\alpha(\frac{D}{h^2} + k_0)$
- $M_{32} = (1 - 2\alpha)\frac{D}{h^2} + 2\alpha\frac{1}{h}$
- $M_{33} = -\frac{2D}{h^2} + \frac{1}{h} - k_0$
- $M_{(n-1)2} = -2\alpha(\frac{D}{h^2} - \frac{1}{h})$.

Chapitre 3

Comparaison 'early lumping' et 'late lumping'

Ce chapitre a pour but de comparer l'early et le late lumping du système de convection, diffusion et réaction. Dans le premier cas, le système est discrétisé et la théorie de la dimension finie, présentée au chapitre 1, est utilisée. Tandis que dans le second cas, la théorie de la dimension infinie, présentée au chapitre 2, est appliquée avant la discrétisation.

À première vue, il est difficile de savoir laquelle des deux méthodes est la plus efficace. Intuitivement, le contrôle de la dimension infinie reste exact jusqu'à la discrétisation alors que celui de la dimension finie sera une approximation du contrôle réel.

En ce qui concerne les simulations, nous avons implémenté les codes en Matlab. Ceux de la dimension finie ont été faits à partir de la référence [12]. L'idée consiste à transformer le système discrétisé via la transformation canonique de la proposition 1.1 et à déterminer les matrices G_n et G_l de l'estimateur. Ensuite, nous utilisons ces matrices pour intégrer la dynamique d'erreur dans les coordonnées de base. Pour la dimension infinie, nous intégrerons le système en prenant le contrôle (2.6)

Les discrétisations ont déjà été présentées dans les sections 1.4 et 2.3. Nous avons donc travaillé sur les systèmes du type $\dot{X} = AX$, où A était une matrice de dimension égale au pas de discrétisation n . Dans nos simulations, nous avons pris $n = 30$. Les autres paramètres ont été choisis comme suit : $D = 1$, $k_0 = 10^{-1}$, $\delta = 10^{-4}$ et enfin $\alpha = 2$. Nous avons intégré sur un intervalle temporel $[0, 5]$. Néanmoins, lorsque cela est nécessaire, nous affichons un intervalle plus petit pour garder une certaine lisibilité des graphiques. Nous avons effectué des tests avec différentes perturbations et différentes valeurs de ρ . Pour rappel, D et k_0 sont des paramètres du modèle, δ permet de régulariser le contrôle en mode glissant unitaire

$$u_g(t) = \rho \frac{Ce}{|Ce| + \delta}$$

et α est un paramètre du contrôle en dimension infinie. D'ailleurs, dans certains ouvrages sur le contrôle par modes de glissement, par exemple dans [24], la méthode de régularisation de la fonction signe se fait en prenant la fonction saturation définie comme

$$sat\left(\frac{x}{\gamma}\right) = \begin{cases} sign(x) & \text{si } |x| > \gamma \\ \frac{x}{\gamma} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où γ est un paramètre positif d'ajustement.

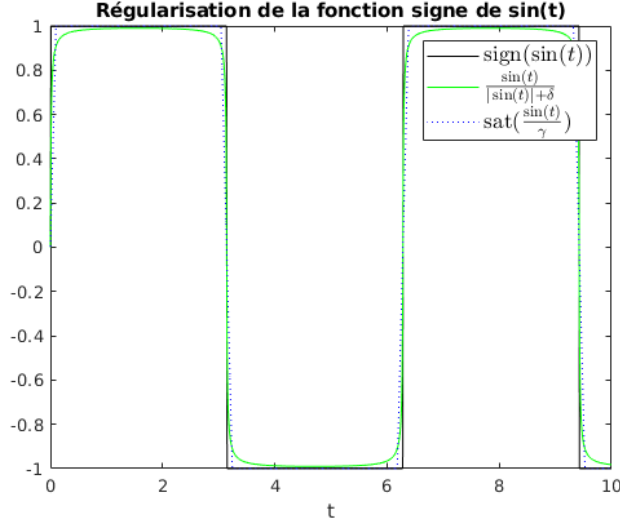


FIGURE 3.1 – Graphique des différentes fonctions signe.

Exemple 3.1. Essayons ces différentes fonctions "signe" sur une sinusoïde. Sur la figure 3.1, nous avons représenté les approximations de $\text{sign}(\sin(t))$ pour t allant de 0 à 10. Nous voyons que dans les deux cas, les fonctions approchent de manière satisfaisante la fonction signe. Il faut tout de même avoir un compromis entre approximation et régularisation. Plus le paramètre d'ajustement est petit, plus l'erreur commise sera petite. A contrario, plus le paramètre sera grand, plus la fonction sera "régulière", ce qui facilitera l'intégration pour le contrôle en mode glissant.

En théorie du contrôle, il existe différents outils permettant de mesurer l'efficacité d'une entrée. Nous avons sélectionné plusieurs d'entre eux pour comparer l'early et le late lumping. On définit la *valeur stable* comme étant la valeur de la convergence. Dans notre cas, ce sera 0. On introduit également le *dépassement* comme étant la valeur maximale dépassant la valeur asymptotique. On choisit ensuite un voisinage de la valeur stable et on appelle le *temps d'établissement* (*settling time* en anglais) le temps nécessaire pour que toutes les trajectoires soient dans ce voisinage. La figure 3.2 illustre ces outils dans le cas unidimensionnel.

3.1 Cas non perturbé

Bien que l'avantage du mode glissant soit la robustesse vis-à-vis des perturbations, il faut que ce contrôle fonctionne dans le cas de base, avec $\phi(t)$ identiquement nul. Nous commençons donc par ce cas. Que ce soit pour le late ou l'early lumping, nous avons dû discrétiser le modèle dans le but de l'intégrer numériquement. Nous obtenons ainsi n trajectoires (avec $n = 30$). La fonction Matlab `mesh` permet de représenter les trajectoires en trois dimensions, en interpolant entre les n solutions. Nous pouvons voir le résultat pour la dynamique d'erreur non perturbée obtenue pour les deux méthodes sur la figure 3.3.

La condition initiale a été choisie r vérifier la condition de Levaggi (2.10). Pour rappel, les paramètres du modèle sont fixés à $D = 1$ et $k_0 = 0.1$ ce qui assure la stabilité de l'estimateur. Graphiquement, l'early et le late lumping engendrent des résultats similaires. Il est très difficile de savoir lequel est le plus efficace. Nous avons donc calculé les indices de performances qui

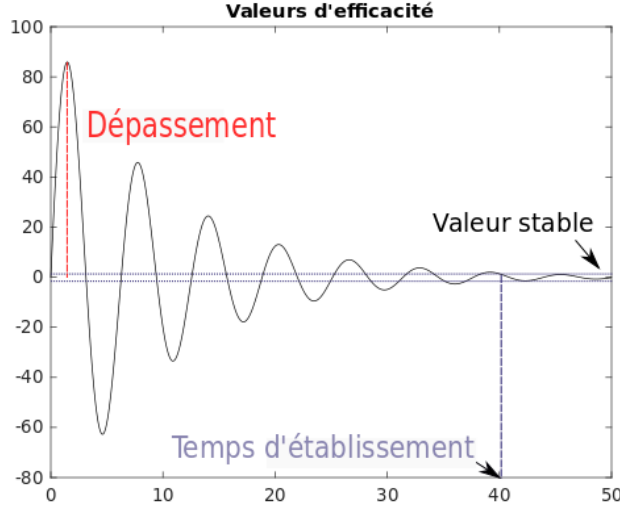


FIGURE 3.2 – Représentation des différentes valeurs importantes pour évaluer l'efficacité d'un contrôle.

	Early lumping	Laye lumping
temps d'établissement	1.29s	0.41s
Valeur maximale	0.5u	0.5u

TABLE 3.1 – Tableau contenant les temps d'établissement ainsi que les valeurs maximale de l'erreur pour l'early et le late lumping pour la dynamique d'erreur non perturbée. Le voisinage pour le calcul du temps d'établissement est de longueur 0.02.

sont le dépassement et le temps d'établissement. Le premier n'est pas de grande utilité dans nos circonstances car les solutions ont tendance à décroître rapidement ce qui implique qu'il n'y a pas de dépassement. La valeur maximale de l'erreur est donnée par la valeur initiale maximale

$$e_0(1) = 0.5.$$

Les valeurs obtenues sont présentées dans le tableau 3.1. C'est donc le late lumping qui converge le plus rapidement, plus de trois fois plus vite. Nous avons calculé que l'erreur de l'early lumping atteint une première fois le voisinage en 0.81s mais le quitte quelques instants plus tard. Les trajectoires restent emprisonnées après 1.29 seconde. Cela pourrait indiquer que l'early lumping est plus sensible au phénomène de chattering.

Ensuite, nous avons montré dans la section 2.2.3 que la dynamique d'erreur pour le late lumping était exponentiellement stable sur $\mathcal{H}^1(0,1)$. Ceci n'a pas réellement de sens pour l'early lumping étant donné que cela se passe en dimension finie. Cependant, il s'agit de la discrétisation d'un modèle de dimension infinie et nous pouvons donc calculer sa norme dans $\mathcal{H}^1(0,1)$, malgré que sa convergence n'a pas été prouvée. Le calcul de la norme se fait grâce aux différences finies. Les résultats sont visibles sur la figure 3.4. Nous remarquons que la convergence vers 0 se fait dans les deux cas. Il y a néanmoins une légère différence qui semble être en faveur du late lumping.

Pour terminer le cas non perturbé, nous avons représenté les contrôles en mode glissant appliqués dans les deux cas sur la figure 3.5. Nous avons également pris le soin de donner les

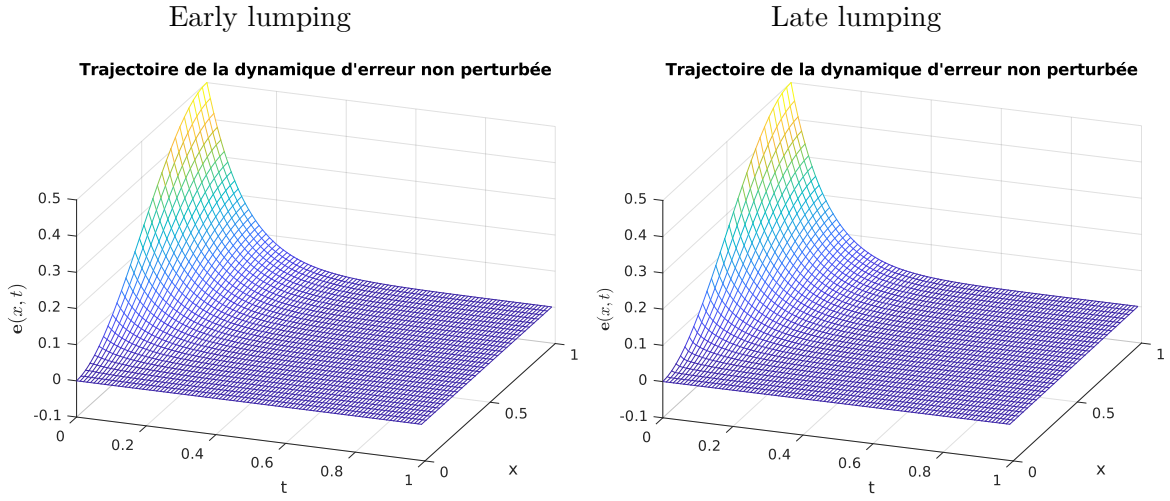


FIGURE 3.3 – Trajectoire de la dynamique d'erreur non perturbée ($\phi(t) = 0$). La condition initiale est $e_0(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2$. Les paramètres sont fixés à $\rho = 4$ et $\delta = 10^{-4}$. Le graphique à trois dimensions de gauche a été obtenu via l'early lumping tandis que celui de droite a été engendré via le late lumping.

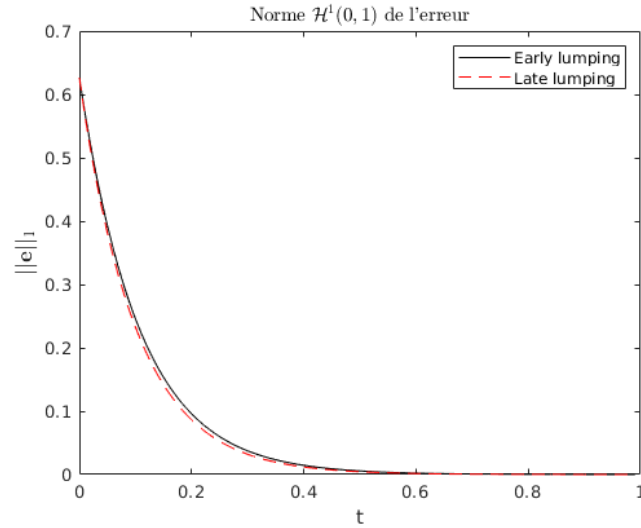


FIGURE 3.4 – Norme $\mathcal{H}^1(0,1)$ de la dynamique d'erreur pour l'early et le late lumping. Les paramètres sont identiques à ceux de la figure 3.3.

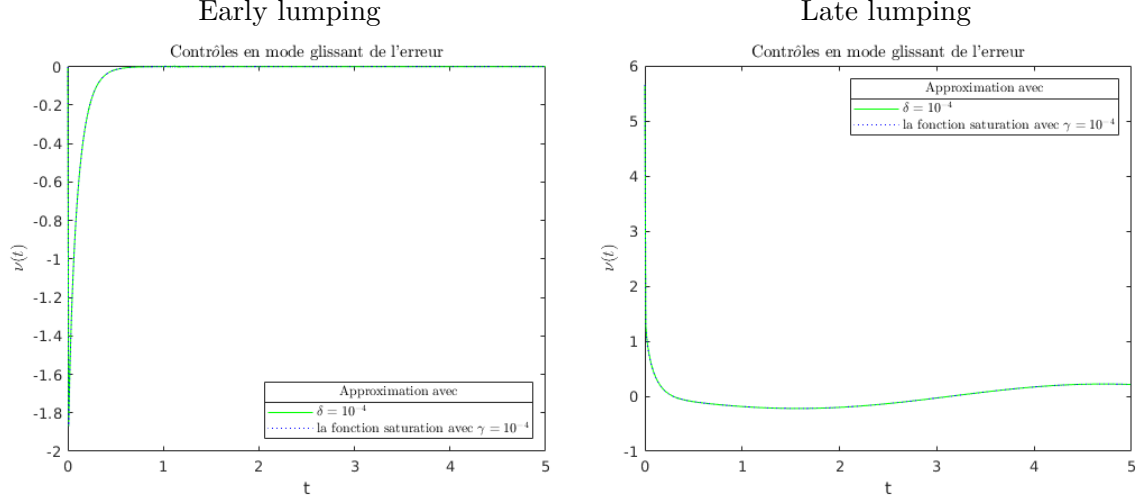


FIGURE 3.5 – Représentation des contrôles en mode glissant appliqués au modèle de convection, diffusion et réaction. Les paramètres sont identiques à ceux de la figure 3.3. Le graphique de gauche a été obtenu via l’early lumping tandis que celui de droite a été engendré via le late lumping. Les courbes noires donnent l’approximation avec δ et les rouges avec la fonction saturation.

différentes approximations. Bien que de signes opposés, ils semblent agir de manière équivalente : une grande quantité est injectée en début de processus, puis le contrôle oscille autour de 0 à cause du chattering. Les deux méthodes d’approximations ne diffèrent presque pas. Par ailleurs, les temps d’établissement restent identiques pour les deux méthodes.

3.2 Cas perturbé

Nous avons ajouter une perturbation de la forme $\sin(t)$ dans la dynamique. Cette dernière est bornée sur \mathbb{R}^+ et le mode glissant devrait être capable de la compenser. Les trajectoires obtenues avec $\phi(t) = \sin(t)$ et $\rho = 4$ sont données sur la figure 3.6.

Vu que le paramètre ρ est supérieur à la borne de la perturbation, la dynamique de l’erreur reste stable. D’ailleurs, les valeurs des indices de performances restent inchangées par rapport au cas non perturbé. Le late lumping reste donc plus rapide. Qui plus est, la convergence dans $\mathcal{H}^1(0, 1)$ se fait toujours comme le montre la figure 3.7.

Cependant, si la borne de la perturbation dépasse la valeur de ρ , le système n’est plus censé être stable. Sur la figure 3.8, nous avons représenté les trajectoires du late lumping pour la dynamique d’erreur perturbée par $10\sin(t)$ avec respectivement ρ qui vaut 4 puis 11. Nous voyons que dans le premier cas, la trajectoire est complètement instable, le sinus prenant le dessus sur le contrôle glissant. Par contre, dans le second cas, le paramètre ρ est capable de compenser le sinus et nous retombons dans le cas stable. Ceci permet d’illustrer le travail de compensation du paramètre ρ . Bien entendu, plus celui-ci est élevé, plus le contrôle l’est aussi. Qui plus est, le contrôle varie rapidement entre les valeurs ρ et $-\rho$. Ainsi, la croissance de sa valeur augmente également les effets indésirables tels que le chattering. Nous observons cela sur la figure 3.9

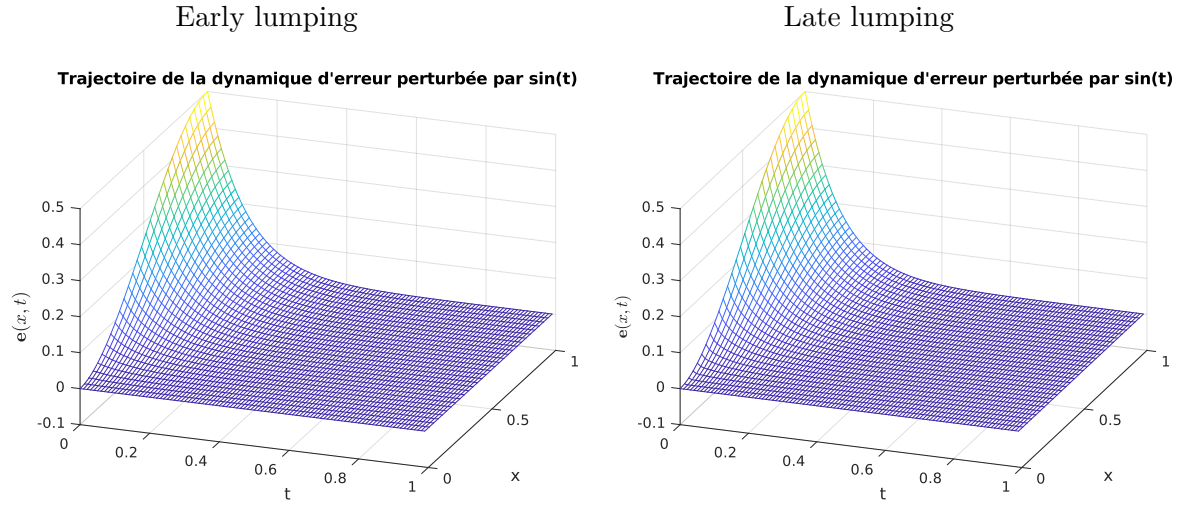


FIGURE 3.6 – Trajectoire de la dynamique d'erreur perturbée par $\phi(t) = \sin(t)$. La condition initiale est $e_0(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2$. Les paramètres sont fixés à $\rho = 4$ et $\delta = 10^{-4}$. Le graphique à trois dimensions de gauche a été obtenu via l'early lumping tandis que celui de droite a été engendré via le late lumping.

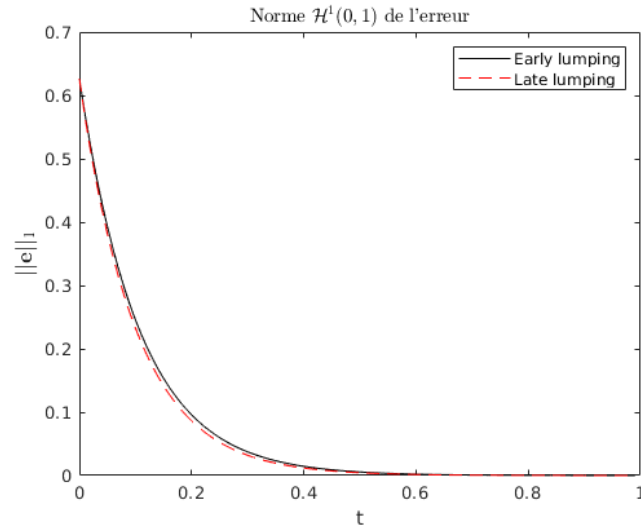


FIGURE 3.7 – Norme $\mathcal{H}^1(0, 1)$ de la dynamique d'erreur perturbée par $\sin(t)$ pour l'early et le late lumping. Les paramètres sont identiques à ceux de la figure 3.3.

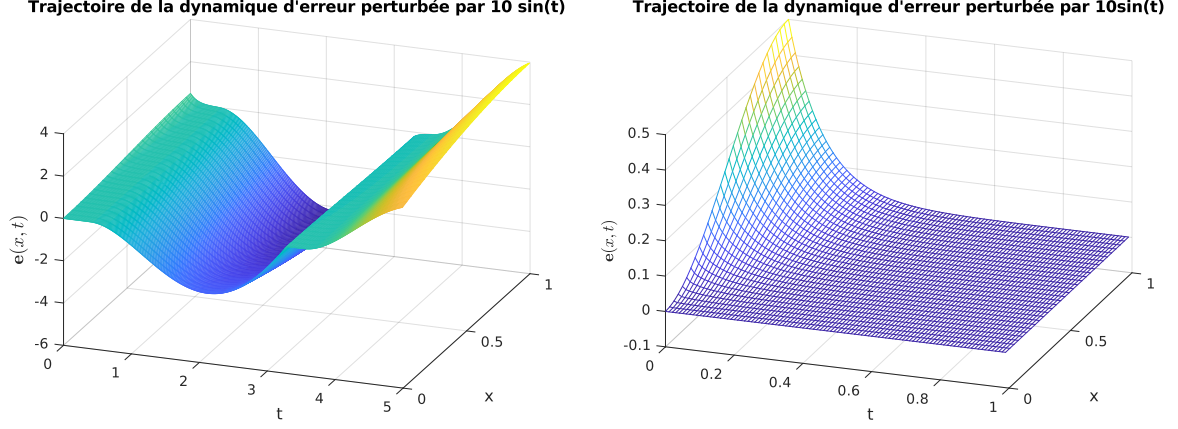


FIGURE 3.8 – Trajectoire de la dynamique d'erreur perturbée par $\phi(t) = 10 \sin(t)$. La condition initiale est $e_0(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2$. Le paramètre ρ vaut 4 à gauche alors qu'il est fixé à 11 à droite.

obtenue en prenant ρ égal à 11.

3.3 Effets des différents paramètres du late lumping

Nous venons de voir que le paramètre ρ permettait de compenser les perturbations. Mais il faut garder un compromis entre compensation et performances. Il y a également d'autres paramètres sur lesquels nous pouvons jouer : le paramètre du modèle α , ceux de l'approximation de la fonction signe δ et γ , la condition initiale et enfin le terme perturbateur $\phi(t)$.

Premièrement, le paramètre α est une constante permettant de transformer le modèle sous la forme d'une équation abstraite. Dans notre modèle, nous l'avons pris strictement positif mais il était juste nécessaire que celui-ci soit non nul et différent de -1 . Néanmoins, lorsque nous prenons cette valeur négative dans nos simulations, la dynamique n'est plus stable. Qui plus est, pour certaines valeurs telles que $\alpha = -10$, l'intégration ne se fait plus. À l'heure actuelle, nous n'avons pas trouvé la raison de ceci. Mis à part cela, ce paramètre n'influence pas réellement la dynamique, tant qu'il reste positif.

Deuxièmement, nous avons vu que les deux approximations de la fonction signe donnaient des résultats équivalents. La seule différence est que si le paramètre d'ajustement est extrêmement petit, la méthode avec le δ prendra un temps considérable pour l'intégration alors que la fonction saturation est simplement la fonction signe tant que les trajectoires vérifient $|e(x, t)| > \gamma$. Ensuite, dans les deux cas, lorsque le paramètre d'ajustement est trop élevé, la stabilisation ne se fait plus. L'écart entre le contrôle théorique et le contrôle appliqué devient trop important. Nous avons illustré ceci sur la figure 3.10 avec $\delta = 0.1$. Nous avons obtenu des résultats équivalents avec la fonction saturation. Mentionnons tout de même que la valeur 10^{-4} semble être le bon choix étant donné que le contrôle stabilise de manière efficace la dynamique. Nous avons obtenu exactement les mêmes résultats en prenant la valeur 10^{-10} , sauf que l'intégration prend beaucoup plus de temps pour la méthode avec δ .

Troisièmement, le théorème de Levaggi 2.1 nous assure l'existence de solution viable gén-

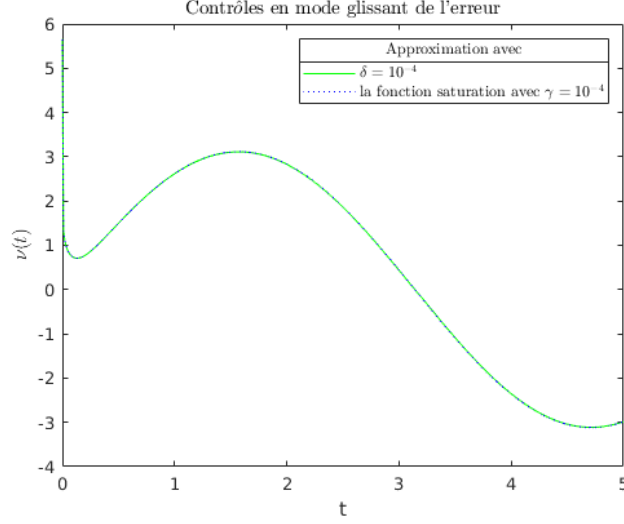


FIGURE 3.9 – Représentation du contrôle en mode glissant du late lumping avec $\rho = 11$ et $\phi(t) = 10\sin(t)$. La courbe noire donne l'approximation avec δ et la rouge avec la fonction saturation.

ralisée pour toute condition initiale dans le noyau de C . Néanmoins, lorsque nous testons des conditions initiales hors de $\ker C$ mais vérifiant les conditions aux bords, la dynamique reste stable. Cela indique qu'il est peut-être possible de généraliser le théorème de Levaggi. En fait, dans cet énoncé, nous supposons que les trajectoires sont déjà dans la surface glissante et on démontre qu'elles y restent. À priori, rien n'empêche de commencer hors de cette surface mis à part le fait que le contrôle doit forcer les trajectoires à l'atteindre en un temps fini. Nous avons fait nos tests avec la condition initiale présentée dans la section 1.4

$$e_0(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + D\frac{\pi}{2}. \quad (3.1)$$

Cette dernière ne s'annule pas en $x = 0$ mais vérifie la condition de Levaggi si $\rho = 4$. La trajectoire obtenue est présentée sur la figure 3.11. En addition, lorsque nous prenons la condition initiale $e_0(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2$ mais avec $\rho = 2$, ce qui implique que la condition de Levaggi n'est plus vérifiée, la dynamique de l'erreur tend toujours vers 0. Ceci indique également que le théorème d'existence de solution de Filipov peut être généralisé.

Pour terminer, pour l'early lumping, nous avons considéré des perturbations qui pouvaient dépendre de l'état. Dans le cas du late lumping, nous avons choisi une perturbation ne dépendant que du temps. Néanmoins, cette dernière peut également dépendre de l'état. Nous avons testé cela sur la figure 3.12 où la perturbation est la n -ième trajectoire d'état.

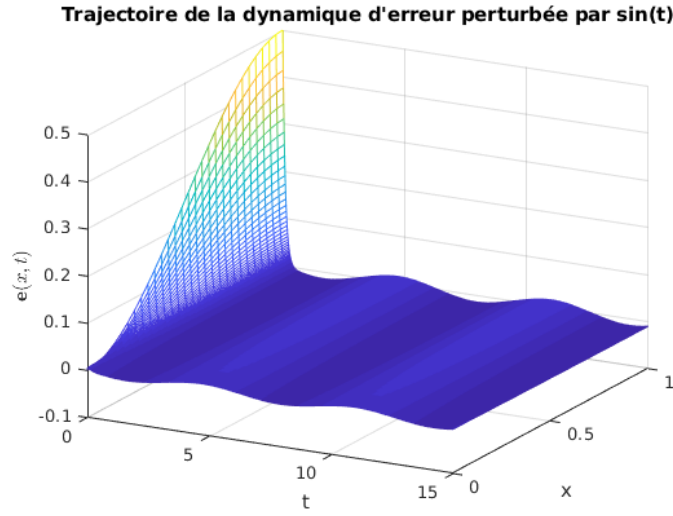


FIGURE 3.10 – Trajectoire de la dynamique d'erreur perturbée par $\sin(t)$ obtenue pour le late lumping avec $\delta = 0.1$. Nous observons une oscillation autour de 0 due à la perturbation. Le contrôle ne parvient pas à garder les trajectoires dans un voisinage de 0 de longueur 0.02.

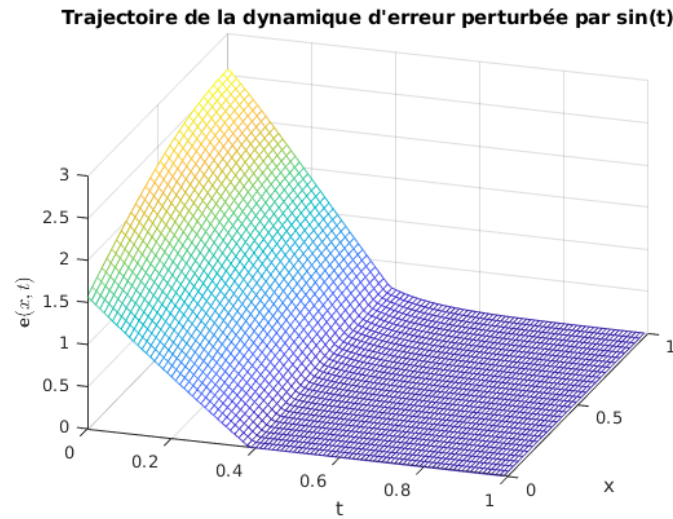


FIGURE 3.11 – Trajectoire de la dynamique d'erreur perturbée par $\sin(t)$ obtenue pour le late lumping avec $\delta = 0.4$, $\rho = 4$ et la fonction (3.1) comme condition initiale.

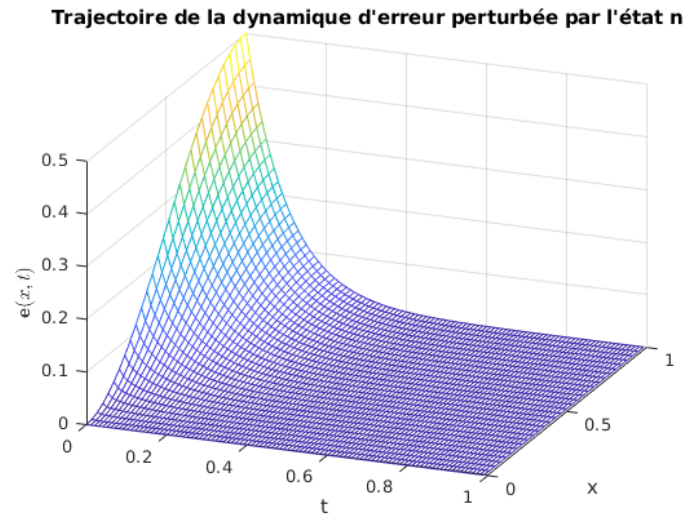


FIGURE 3.12 – Trajectoire de la dynamique d'erreur perturbée par E_n obtenue pour le late lumping avec $\delta = 10^{-4}$ et $\rho = 4$. La condition initiale est donnée par $e_0(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2$.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Dans ce mémoire, nous avons d'abord introduit le concept d'estimation d'état par mode glissant en dimension finie. Nous avons commencé par les solutions de Filipov qui généralisent les solutions d'équations différentielles au cas discontinu. Nous avons vu que leur existence était assurée par la bornitude locale du membre de droite de l'équation 1.1. Nous avons ensuite présenté l'estimateur par modes de glissement tiré de l'ouvrage [12]. La convergence de l'erreur d'estimation a été démontrée.

Ensuite, nous avons travaillé sur l'approche fonctionnelle. Tout d'abord, nous avons présenté le raisonnement pour arriver à un résultat clé dans la théorie de l'estimation d'état par modes de glissement dans les espaces de Banach : le théorème d'existence de solutions de Filipov [22, Corollary 2.1]. Pour pouvoir l'appliquer, six hypothèses ont dû être vérifiées sur le modèle de convection, diffusion et réaction linéaire, dont la condition de croissance et la génération de semi-groupe compact. Par ailleurs, le but était de construire un estimateur sur la base des mesures faites au bord du système, lorsque la variable spatiale est nulle. Nous avons donc choisi de travailler sur l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1(0,1)$ pour s'assurer de la bornitude de l'opérateur d'observation

$$C: X \rightarrow \mathbb{R}, z(\cdot) \mapsto z(0).$$

Par conséquent, nous avons démontré que l'opérateur

$$-A = D \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} - k_0 I$$

était le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu et compact de quasi-contraction sur cet espace.

Il s'est avéré que notre développement nous a amené au théorème 2.4 qui reste valable pour d'autres systèmes. Typiquement, il s'applique à des opérateurs différentiels définis sur $\mathcal{H}^1(0,1)$, grâce à la régularité du domaine. Mentionnons tout de même que l'espace des fonctions de carré intégrable est beaucoup plus utilisé que les espaces de Sobolev.

Dans la continuité, nous avons prouvé la stabilité exponentielle de la dynamique d'erreur grâce à la théorie de Lyapunov. De plus, nous avons montré que l'erreur converge uniformément en x vers 0 lorsque la variable temporelle tend vers l'infini.

Enfin, nous avons terminé notre travail par une comparaison des performances de l'early et du late lumping. Pour cela, nous avons effectué plusieurs simulations numériques. Celles-ci nous ont indiqué que l'approche fonctionnelle était la plus efficace concernant la vitesse de convergence.

Perspectives

Premièrement, le théorème d'existence de solutions de Filipov suppose que l'erreur initiale est nulle en $x = 0$. Nous avons vu dans les simulations que les trajectoires pouvaient rester stables lorsque cette condition n'était pas vérifiée. Il en était de même pour la condition de Levaggi (2.10). Une des perspectives serait d'approfondir ce résultat et de voir s'il pourrait être généralisé.

Deuxièmement, dans le théorème d'existence de solutions de Filipov, nous avons linéarisé le membre de droite. En y regardant de plus près, nous nous rendons compte que la linéarité n'est pas nécessaire. L'hypothèse importante est la condition de croissance 5. Or, il existe beaucoup de modèles de convection, diffusion et réaction non linéaires (par exemple, [21]). Néanmoins, il faut vérifier la génération de semi-groupe fortement continue sur $\mathcal{H}^1(0, 1)$ dans le cas non linéaire.

Enfin, dans la relation (2.5), nous avons choisi le paramètre α strictement positif. Or, dans notre développement, nous avons vu que ce paramètre devait être non nul et différent de -1 . Néanmoins, la stabilité ne tenait plus lorsque nous prenions des valeurs négatives de α dans nos simulations. Nous n'avons pas trouvé d'explication à cela. Une perspective serait d'investiguer et de comprendre ce phénomène.

Annexes

Sous-espace vectoriel propre

Proposition 3.1. *Soit X un espace de Banach et S un sous-espace vectoriel propre de X . Alors, l'ensemble $X \setminus S$ est dense dans X .*

Démonstration. Premièrement, montrons que S est d'intérieur vide. Supposons avoir $x \in S^\circ$, l'intérieur de S . Vu que c'est un ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que la boule $B_\epsilon(x) \subseteq S^\circ$. Vu que c'est un sous-espace vectoriel, la boule $B_\epsilon(x) - x = B_\epsilon(0)$ est dans S . De plus, pour tout $y \in X$, il existe $\delta < \epsilon$, tel que

$$\frac{\delta}{\|y\|}y \in B_\epsilon(0) \subseteq S.$$

Par conséquent, l'élément y est dans S . En d'autres termes, nous avons $S = X$, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Deuxièmement, si S est d'intérieur vide, alors la frontière ∂S de S est donnée par

$$\partial S = \overline{S} \setminus S^\circ = \overline{S}.$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}\overline{X \setminus S} &= X \setminus S \cup \partial(X \setminus S) \\ &= X \setminus S \cup \partial S \\ &= X \setminus S \cup \overline{S} \\ &= X.\end{aligned}$$

La deuxième égalité vient du fait que la frontière du complémentaire est égale à la frontière de l'ensemble (car $\partial S = \overline{S} \cap \overline{S^c}$).

□

Erreur de modélisation

Le contrôle est donné par

$$\begin{aligned}u_2(t) &= \alpha A e(0, t) + \alpha e_t(0, t) \\ &= -\alpha D \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(0, t) + \alpha \frac{\partial e}{\partial x}(0, t) + \alpha k_0 e(0, t) + \alpha \frac{\partial e}{\partial t}(0, t) \\ &= -\alpha D \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(0, t) + \frac{\alpha}{D} e(0, t) + \alpha k_0 e(0, t) + \alpha \frac{\partial e}{\partial t}(0, t).\end{aligned}$$

Posons $\alpha = \frac{\beta}{D} - 1$, avec $\beta > 0$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
u_2(t) &= (D - \beta) \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(0, t) + \left(\frac{\beta}{D} - 1\right) \left(\frac{1}{D} + k_0\right) e(0, t) + \left(\frac{\beta}{D} - 1\right) \frac{\partial e}{\partial t}(0, t) \\
&= (D - \beta) \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(0, t) + \left(\frac{\beta}{D} - 1\right) \frac{1}{D} e(0, t) + \alpha k_0 e(0, t) + \beta \frac{1}{D} \frac{\partial e}{\partial t}(0, t) - \frac{\partial e}{\partial t}(0, t) \\
&= (D - \beta) \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(0, t) + \left(\frac{\beta}{D} - 1\right) \frac{\partial e}{\partial x}(0, t) + \alpha k_0 e(0, t) + \beta \frac{\partial^2 e}{\partial t \partial x}(0, t) - \frac{\partial e}{\partial t}(0, t) \\
&= (D - \beta) \left(\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(0, t) - \frac{1}{D} \frac{\partial e}{\partial x}(0, t) \right) + \alpha k_0 e(0, t) + \beta \frac{\partial^2 e}{\partial t \partial x}(0, t) - \frac{\partial e}{\partial t}(0, t).
\end{aligned}$$

Pour arriver au contrôle de l'article [10], il faut donc avoir

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(0, t) = \frac{1}{D} \frac{\partial e}{\partial x}(0, t)$$

ce qui n'est pas le cas dans notre modèle.

Convergence de la série dans $\mathcal{H}^1(0, 1)$

Nous voulons montrer que la série

$$K(t_0)z = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} e^{\lambda_n t_0} \langle z, \psi_n \rangle_0 \phi_n(\cdot), \quad (3.2)$$

converge dans $\mathcal{H}^1(0, 1)$. Pour cela, nous devons démontrer que la dérivée de la série converge dans $L^2(0, 1)$. Cela sera le cas si

$$\frac{dK(t_0)z}{dx}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} e^{\lambda_n t_0} \langle z, \psi_n \rangle_0 \frac{d\phi_n}{dx}(\cdot) \quad (3.3)$$

dans $L^2(0, 1)$.

Or, nous savons que si la série (3.2) converge dans $L^2(0, 1)$ et que la série des dérivées converge uniformément dans $L^2(0, 1)$, alors nous aurons l'égalité souhaitée (3.3).

Montrons que la série des dérivées converge uniformément dans $L^2(0, 1)$. La dérivée des fonctions propres est

$$\frac{d\phi_n}{dx}(x) = \frac{e^{\frac{x}{2D}}}{L_n D} \left(\cos\left(\frac{s_n}{2D}x\right) + \frac{1 - s_n^2}{2s_n} \sin\left(\frac{s_n}{2D}x\right) \right).$$

Par conséquent, nous avons pour tout z dans $L^2(0, 1)$

$$\left| \frac{d\phi_n}{dx} \right| = L_n^{-1} \frac{e^{\frac{1}{2D}}}{D} \left(1 + \frac{1 - s_n^2}{2s_n} \right) = \mathcal{O}(n),$$

lorsque n est assez grand.

Ensuite, pour montrer la convergence uniforme, nous allons majorer en valeur absolue le terme général de la série par le terme général indépendant de x d'une série convergente, i.e. si $u_n(x) = e^{\lambda_n t_0} < z, \psi_n >_0 \frac{d\phi_n}{dx}(x)$, alors nous cherchons une série $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} v_n$ telle que

$$|u_n(x)| \leq v_n, \quad \forall x \in [0, 1]$$

pour n suffisamment grand. Or, nous observons

$$\begin{aligned} |u_n(x)| &= \left| e^{\lambda_n t_0} < z, \psi_n >_0 \frac{d\phi_n}{dx}(x) \right| \\ &= e^{\lambda_n t_0} | < z, \psi_n >_0 | L_n^{-1} \left(1 + \frac{1 - s_n^2}{2s_n} \right). \end{aligned}$$

Le produit scalaire est fini étant donné que les fonctions ψ_n forment une base de Riesz de $L^2(0, 1)$.

Le critère de d'Alembert sur la suite $v_n = e^{\lambda_n t_0} | < z, \psi_n >_0 | L_n^{-1} \left(1 + \frac{1 - s_n^2}{2s_n} \right)$ permet de conclure.

Calcul de la norme des fonctions propres

Nous avons

$$\phi_n(x) = L_n^{-1} e^{\frac{x}{2D}} \left(\cos\left(\frac{s_n}{2D}x\right) + \frac{1}{s_n} \sin\left(\frac{s_n}{2D}x\right) \right).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} L_n^2 \|\phi_n\|_0^2 &= \int_0^1 e^{\frac{x}{D}} \left(\cos\left(\frac{s_n}{2D}x\right) + \frac{1}{s_n} \sin\left(\frac{s_n}{2D}x\right) \right)^2 dx \\ &= \int_0^1 e^{\frac{x}{D}} \left(\cos^2\left(\frac{s_n}{2D}x\right) + \frac{1}{s_n^2} \sin^2\left(\frac{s_n}{2D}x\right) + \frac{2}{s_n} \cos\left(\frac{s_n}{2D}x\right) \sin\left(\frac{s_n}{2D}x\right) \right) dx. \end{aligned}$$

En utilisant les formules de Carnot, nous trouvons

$$\begin{aligned} L_n^2 \|\phi_n\|_0^2 &= \frac{s_n^2 + 1}{2s_n^2} \int_0^1 e^{\frac{x}{D}} dx + \int_0^1 e^{\frac{x}{D}} \left(\frac{s_n^2 - 1}{2s_n^2} \cos\left(\frac{s_n}{D}x\right) + \frac{1}{s_n} \sin\left(\frac{s_n}{D}x\right) \right) dx \\ &= \frac{s_n^2 + 1}{2s_n^2} (e^{\frac{1}{D}} - 1) + \int_0^1 e^{\frac{x}{D}} \left(\frac{s_n^2 - 1}{2s_n^2} \cos\left(\frac{s_n}{D}x\right) + \frac{1}{s_n} \sin\left(\frac{s_n}{D}x\right) \right) dx. \end{aligned}$$

Pour la seconde intégrale, nous savons que sa primitive vérifie

$$\int e^{\frac{x}{D}} \left(\frac{s_n^2 - 1}{2s_n^2} \cos\left(\frac{s_n}{D}x\right) + \frac{1}{s_n} \sin\left(\frac{s_n}{D}x\right) \right) dx = e^{\frac{x}{D}} \left(A \cos\left(\frac{s_n}{D}x\right) + B \sin\left(\frac{s_n}{D}x\right) \right).$$

En dérivant les deux membres par rapport à x et en égalant les coefficients, nous obtenons le système

$$\begin{cases} D \frac{s_n^2 - 1}{2s_n^2} = A + B s_n \\ \frac{D}{s_n} = B - A s_n, \end{cases}$$

ce qui devient

$$\begin{cases} A = -\frac{D}{2s_n^2} \\ B = \frac{D}{2s_n}. \end{cases}$$

En conclusion, nous trouvons

$$L_n^2 \|\phi_n\|_0^2 = \frac{s_n^2 + 1}{2s_n^2} (e^{\frac{1}{D}} - 1) + e^{\frac{1}{D}} \left(-\frac{D}{2s_n^2} \cos\left(\frac{s_n}{D}\right) + \frac{D}{2s_n} \sin\left(\frac{s_n}{D}\right) \right) + \frac{D}{2s_n^2}.$$

Nous prenons donc la suite L_n égale à la racine carrée de l'expression précédente pour normaliser ϕ_n sur $L^2(0, 1)$.

Ensuite, nous prenons la dérivée des fonctions propres

$$\frac{d\phi_n}{dx}(x) = \frac{e^{\frac{x}{2D}}}{L_n D} \left(\cos\left(\frac{s_n}{2D}x\right) + \frac{1 - s_n^2}{2s_n} \sin\left(\frac{s_n}{2D}x\right) \right).$$

En effectuant un développement identique au cas précédent, nous obtenons

$$\begin{aligned} L_n^2 \left\| \frac{d\phi_n}{dx} \right\|_0^2 &= \frac{1}{2D^2} \left(1 + \frac{(1 - s_n^2)^2}{4s_n^2} \right) (e^{\frac{1}{D}} - 1) \\ &+ \frac{1}{D^2} \int_0^1 e^{\frac{x}{D}} \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{(1 - s_n^2)^2}{4s_n^2} \right) \cos\left(\frac{s_n}{D}x\right) + \frac{1 - s_n^2}{2s_n} \sin\left(\frac{s_n}{D}x\right) \right) dx. \end{aligned}$$

Pour la seconde intégrale, nous devons résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{D}{2} \left(1 - \frac{(1 - s_n^2)^2}{4s_n^2} \right) = A + Bs_n \\ D \frac{1 - s_n^2}{2s_n} = B - As_n, \end{cases}$$

ce qui devient

$$\begin{cases} A = D \frac{3s_n^4 + 2s_n^2 - 1}{8s_n^2(1 + s_n^2)} \\ B = D \frac{-s_n^4 + 2s_n^2 + 3}{8s_n(1 + s_n^2)}. \end{cases}$$

Pour finir, nous avons

$$\begin{aligned} L_n^2 \left\| \frac{d\phi_n}{dx} \right\|_0^2 &= \frac{1}{2D^2} \left(1 + \frac{(1 - s_n^2)^2}{4s_n^2} \right) (e^{\frac{1}{D}} - 1) \\ &+ \frac{1}{2D} \left(e^{\frac{1}{D}} \left(\frac{3s_n^4 + 2s_n^2 - 1}{4s_n^2(1 + s_n^2)} \cos\left(\frac{s_n}{D}\right) + \frac{-s_n^4 + 2s_n^2 + 3}{4s_n(1 + s_n^2)} \sin\left(\frac{s_n}{D}\right) \right) - \frac{3s_n^4 + 2s_n^2 - 1}{4s_n^2(1 + s_n^2)} \right). \end{aligned}$$

Lexique

- **Absolument continu** : Une fonction absolument continue peut être définie comme une fonction \mathbf{f} dérivable presque partout, dont la dérivée est intégrable et vérifiant

$$\mathbf{f}(z) = \mathbf{f}(a) + \int_a^z \frac{d\mathbf{f}}{dz}(u)du,$$

pour tout $z \in [a, b]$.

- **DéTECTABLE** : Un système (A, B, C, D) est détectable si tous les états inobservables sont stables. On dit aussi que la paire (A, C) est détectable.
- **Enveloppe convexe** : L'enveloppe convexe d'un ensemble E est l'intersection de tous les ensembles convexes contenant E . En particulier, si nous travaillons sur un espace normé, elle est donnée par l'ensemble des combinaisons convexes des éléments de E

$$co(E) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, x_i \in E, \lambda_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n \text{ et } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

- **Espace de Hilbert** : Un espace de Hilbert est un espace pré-Hilbertien dont la norme est définie sur base du produit scalaire

$$\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}.$$

- **Espace pré-Hilbertien** : Un espace pré-Hilbertien est un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire.
- **Localement borné** : Une fonction est localement bornée si elle est bornée sur au moins un voisinage de chacun de ces points.
- **Opérateur adjoint** : Soit E et F deux espaces de Hilbert et $A: E \rightarrow F$ un opérateur. L'opérateur adjoint de A , noté $A^*: F^* \rightarrow E^*$, est un opérateur défini sur son domaine

$$D(A^*) = \{v \in F^* \mid \exists c \geq 0, | \langle v, Au \rangle_F | \leq c, \forall u \in D(A)\},$$

vérifiant

$$\langle v, Au \rangle_F = \langle A^*v, u \rangle_E, \quad \forall u \in D(A) \text{ et } v \in D(A^*).$$

- **Opérateur compact** : Opérateur continu renvoyant tout partie bornée sur une partie relativement compacte (dont l'adhérence est compacte).
- **Semi-groupe fortement continu** : Un semi-groupe est une famille d'opérateurs linéaires bornés $(T(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Banach X vérifiant $T(t+s) = T(t)T(s)$, pour tout t et s positifs et $T(0) = I$. Le semi-groupe est dit fortement continu si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0, \quad \forall x \in X.$$

— **Semi-groupe de contraction** : Un semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est de contraction si

$$\|T(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$$

De plus, il est de quasi-contraction s'il existe une constante α vérifiant

$$\|T(t)\| \leq e^{\alpha t}, \quad \forall t \geq 0.$$

— **Zéro invariant** : Le complexe λ est un zéro invariant du système (A, B, C, D) s'il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ et $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^m$ vérifiant

$$\begin{pmatrix} \lambda I - A & -B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Bibliographie

- [1] AGMON, S. *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*. AMS Chelsea Publishing, 2010.
- [2] AL-KURSI, A. *et al.* Tubular reactor, 2017. Disponible via l'URL <<https://www.slideshare.net/saidalqurri/tubular-reactor>>.
- [3] AUBIN, J.-P. et A. CELLINA. *Differential Inclusions : Set-Valued Maps and Viability Theory*. Vol. 264. Springer-Verlag, 1984.
- [4] AURIOL, J., K. MORRIS et F. DI MEGLIO. Late-lumping backstepping control of partial differential equations. *Automatica*. 2019, 100, p. 247–259.
- [5] BHAUMIK, S. et P. DATE. Pages 27–50. In : *The Kalman filter and the extended Kalman filter*, 2019.
- [6] BREZIS, H. *Function Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.
- [7] CORTES, J. Discontinuous dynamical systems : A tutorial on solutions, nonsmooth analysis, and stability. *IEEE Control Syst. Mag.* 2009, 28.
- [8] CURTAIN, R. et H. ZWART. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*. Springer, 1995.
- [9] DELATTRE, C., D. DOCHAIN et J. WINKIN. Sturm-liouville systems are riesz-spectral systems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*. 2003, 13.
- [10] DIMASSI, H., J. WINKIN et A. VANDE WOUWER. A sliding mode observer for a linear reaction–convection–diffusion equation with disturbances. *Systems and Control Letters*. 2018, p. 40–48.
- [11] DRAKUNOV, S. et V. UTKIN. Sliding mode observers. tutorial. 1996, p. 3376 – 3378 vol.4.
- [12] EDWARDS, C. et S. K. SPURGEON. *Sliding mode control : theory and applications*. CRC Press, 1998.
- [13] EDWARDS, C., S. K. SPURGEON et R. PATTON. Sliding mode observers for fault detection and isolation. *Automatica*. 2000, 36, p. 541–553.
- [14] ENGEL, K.-J. et R. NAGEL. *A Short Course on Operator Semigroups*. Springer-Verlag, 2006. 247 p.
- [15] EVANS, G., J. BLACKLEDGE et P. YARDLEY. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Springer, 2000.
- [16] FILIPPOV, Aleksel Fedorovich. *Differential equations with discontinuous right-hand side*. Kluwer Academix Publishers, 1960.
- [17] GUO, R., Y. LI et M. LV. Design of infinite sliding mode state observer with application to co2 absorption system of space station. *Acta Astronautica*. 2019, 161.

- [18] HASTIR, A. Dynamical analysis of a nonisothermal axial dispersion reactor, 2018. Mémoire de fin d'études, Université de Namur.
- [19] JACOB, B. et H. ZWART. The 14th internet seminar - infinite-dimensional linear systems theory. 2011.
- [20] KRSTIC, M. et A. SMYSHLYAEV. Pages 71–1. In : *Boundary Control of PDEs :A Course on Backstepping Designs*, SIAM, 2010.
- [21] LAABISSI, M., E. ACHHAB, J. WINKIN et D. DOCHAIN. Trajectory analysis of nonisothermal tubular reactor nonlinear models. *Systems and Control Letters*. 2001, 42, p. 169–184.
- [22] LEVAGGI, L. Sliding modes in banach spaces. *Differential and Integral Equations*. 2002, 15.
- [23] LIU, J.-L. Convection-diffusion-reaction model. 2017.
- [24] LO, Ji-Chang et Ya-Hui KUO. Decoupled fuzzy sliding-mode control. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*. 1998, 6, p. 426 – 435.
- [25] LUENBERGER, D. Observing the state of a linear system. *Military Electronics, IEEE Transactions on*. 1964, p. 74 – 80.
- [26] MOTT, H.V. et A.Z. GREEN. On danckwerts' boundary conditions for the plug-flow with dispersion/reaction model. *Chemical Engineering Communications*. 2015, 202(6), p. 739–745.
- [27] ORLOV, Y.V., A. PISANO et E. USAI. Second-order sliding-mode control of the uncertain heat and wave equations. *SIAM J. Contr. Opt.* 2010, 49.
- [28] ORLOV, Y.V. et V. UTKIN. Sliding mode control in infinite-dimensional systems. *Automatica*. 1987, 23, p. 753–757.
- [29] PISANO, A. et Y. ORLOV. Boundary second-order sliding-mode control of an uncertain heat process with unbounded matched perturbation. *Automatica*. 2012, 48, p. 1768–1775.
- [30] PISANO, A. et E. USAI. Globally convergent real-time differentiation via second order sliding modes. *Int. J. Systems Science*. 2007, 38, p. 833–844.
- [31] SHTESSEL, Y., C. EDWARDS, L. FRIDMAN et A. LEVANT. *Sliding mode control and observation*. Springer, 2014.
- [32] SLOTINE, J.-E., J. K. HEDRICK et E. A. MISAWA. On sliding observers for nonlinear systems. In : *1986 American Control Conference*, 1986, p. 1794–1800.
- [33] SPURGEON, S. K. Sliding mode observers : A survey. *Int. J. Systems Science*. 2008, 39, p. 751–764.
- [34] VRABIE, I. et O. CARJA. Some new viability results for semilinear differential inclusions. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*. 1997, 4, p. 401–424.
- [35] WALCOTT, B. et S. ZAK. State observation of nonlinear uncertain dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1987, 32(2), p. 166–170.
- [36] WINKIN, J., D. DOCHAIN et P. LIGARIUS. Dynamical analysis of distributed parameter tubular reactors. *Automatica*. 2000, p. 349–361.